Ableitung des CAPM aus der Markowitz-Portfoliooptimierung

1 Einführung

Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) kann als Erweiterung der Markowitz-Portfoliotheorie unter bestimmten Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden. Die Ableitung zeigt, wie aus individueller Portfoliooptimierung ein Marktgleichgewichtsmodell entsteht.

2 Markowitz-Portfoliooptimierung

2.1 Grundlegendes Optimierungsproblem

Ein Investor maximiert seinen erwarteten Nutzen durch Wahl der Portfoliogewichte w_i für n riskante Anlagen:

$$\max_{w} \quad U(w) = E[R_p] - \frac{\lambda}{2}\text{Var}(R_p) \tag{1}$$

wobei:

- $E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} w_i E[R_i] = w^\top \mu$ die erwartete Portfoliorendite
- $\text{Var}(R_p) = w^\top \Sigma w$ die Portfoliovarianz
- λ der Risikoaversionskoeffizient
- μ der Vektor der erwarteten Renditen
- Σ die Kovarianzmatrix der Renditen

Nebenbedingung: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ bzw. $w^\top \mathbf{1} = 1$

2.2 Erweiterung um risikolose Anlage

Mit einer risikolosen Anlage mit Rendite r_f lautet das Problem:

$$\max_{w} \quad w^\top \mu + (1 - w^\top \mathbf{1}) r_f - \frac{\lambda}{2} w^\top \Sigma w \tag{2}$$

Die Bedingung erster Ordnung (FOC):

$$\mu - r_f \mathbf{1} - \lambda \Sigma w = 0 \tag{3}$$

Auflösung nach w:

$$w^* = \frac{1}{\lambda} \Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbf{1}) \tag{4}$$

3 Marktgleichgewicht und Tangentialportfolio

3.1 Das Tangentialportfolio

Das optimale Portfolio riskanter Anlagen (unabhängig von λ) ist proportional zu:

$$w_T \propto \Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1}) \tag{5}$$

Normiert: $w_T = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1})}$

3.2 Marktgleichgewichtsbedingung

Im Gleichgewicht muss das aggregierte optimale Portfolio aller Investoren dem Marktportfolio entsprechen. Wenn alle Investoren das gleiche Tangentialportfolio halten (nur in unterschiedlichen Anteilen), muss gelten:

$$w_T = w_M \tag{6}$$

wobei w_M die Marktkapitalisierungsgewichte sind.

4 Ableitung der CAPM-Gleichung

4.1 Ausgangspunkt

Aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1}) \propto w_M \tag{7}$$

Oder:

$$\mu - r_f \mathbf{1} = c \Sigma w_M \tag{8}$$

für eine Konstante $c > 0$.

4.2 Bestimmung der Konstante

Multiplizieren wir beide Seiten mit $w_M^\top$:

$$w_M^\top(\mu - r_f \mathbf{1}) = c w_M^\top \Sigma w_M \tag{9}$$

Links steht: $E[R_M] - r_f$ (erwartete Überschussrendite des Marktportfolios)
Rechts steht: $c \cdot \mathrm{Var}(R_M) = c\sigma_M^2$
Daher:

$$c = \frac{E[R_M] - r_f}{\sigma_M^2} \tag{10}$$

4.3 CAPM-Formel für Anlage i

Setzen wir c in die Gleichung für Anlage i ein:

$$E[R_i] - r_f = c(\Sigma w_M)_i = \frac{E[R_M] - r_f}{\sigma_M^2} \cdot \mathrm{Cov}(R_i, R_M) \tag{11}$$

Da $(\Sigma w_M)_i = \mathrm{Cov}(R_i, R_M)$.

4.4 Definition von Beta

Mit $\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i,R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} = \frac{\mathrm{Cov}(R_i,R_M)}{\sigma_M^2}$ erhalten wir:

$$\boxed{E[R_i] = r_f + \beta_i(E[R_M] - r_f)} \tag{12}$$

Dies ist die **Capital Asset Pricing Model (CAPM) Gleichung**.

5 Interpretation

5.1 Beta als Risikomaß

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} \tag{13}$$

misst das systematische Risiko von Anlage i relativ zum Markt:

- $\beta_i > 1$: Die Anlage ist volatiler als der Markt
- $\beta_i = 1$: Die Anlage bewegt sich wie der Markt
- $\beta_i < 1$: Die Anlage ist weniger volatil als der Markt

5.2 Risikoprämienprinzip

Die erwartete Überschussrendite einer Anlage ist proportional zu ihrem systematischen Risiko (Beta):

$$E[R_i] - r_f = \beta_i \underbrace{(E[R_M] - r_f)}_{\text{Marktrisikopramie}} \tag{14}$$

Nur das systematische Risiko wird vergütet, da das unsystematische Risiko durch Diversifikation eliminiert werden kann.

6 Zentrale Annahmen

Die Ableitung basiert auf folgenden Annahmen:

1. Alle Investoren haben quadratische Nutzenfunktionen oder Renditen sind normalverteilt (Mean-Variance-Rahmen)
2. Homogene Erwartungen: Alle Investoren haben die gleichen Erwartungen über μ und Σ

3. Es existiert eine risikolose Anlage zu r_f
4. Perfekte Kapitalmärkte: keine Transaktionskosten, keine Steuern, beliebige Teilbarkeit
5. Alle Investoren sind Preisnehmer
6. Einperiodiger Anlagehorizont

7 Zusammenfassung

Die Ableitung zeigt den fundamentalen Zusammenhang:

Individuelle Optimierung (Markowitz) $\longrightarrow$ Marktgleichgewicht (CAPM)

Wenn alle Investoren nach Markowitz optimal diversifizieren, führt dies im Marktgleichgewicht zwingend zur CAPM-Beziehung zwischen erwarteter Rendite und systematischem Risiko.