Mathematik Schulwissen

Prof. Dr. Andreas Thümmel

Fassung vom September 2012

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Notationsverzeichnis

$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$\approx$	nahezu gleich
$:=$	wird definiert als
$<$	kleiner als
$\leq$	kleiner gleich
$>$	größer als
$\geq$	größer gleich
$\sim$	proportional zu bzw. ähnlich zu
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$\{\}$	leere Menge, auch $\varnothing$
$\varnothing$	leere Menge, auch $\{\}$
$\subset$	echte Teilmenge von
$\subseteq$	unechte Teilmenge von
$\supset$	echte Obermenge von
$\supseteq$	unechte Obermenge von
$\not\subset$	nicht Teilmenge von
$\cap$	geschnitten mit
$\cup$	vereinigt mit
$\setminus$	ohne
{a; b}	Menge mit den Elementen a und b
{x | ...}	Menge aller x, für die gilt
(a, b)	offenes Intervall, auch]a, b[
]a, b[	offenes Intervall, auch (a, b)
[a, b]	abgeschlossenes Intervall
(a, b]	halboffenes Intervall, auch]a, b]
[a, b)	halboffenes Intervall, auch [a, b[
$\times$	kartesisches Produkt
$\|a\|$	Betrag von a
$\sqrt{a}$	Wurzel aus a
e	Euler'sche Zahl e $\approx$ 2,718281828
π	pi mit $\pi \approx 3{,}14159265$
∞	unendlich
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn

$\Rightarrow$	daraus folgt
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\rightarrow$	wird abgebildet auf
$\circ$	verkettet mit
$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt
	Summenzeichen als Abkürzung für
	Produktzeichen als Abkürzung für x
bzw.	beziehungsweise
G	Grundwert
i	Prozentsatz oder Zinssatz
K(x)	Kostenfunktion
K_0	Anfangskapital
K_{fix}	fixe Kosten
K_n	Endkapital
K_{var}	variable Kosten
lg	Logarithmus zur Basis 10
ln	natürlicher Logarithmus zur Basis e
log	Logarithmus
n	Laufzeit
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^*$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0
ω	Elementarereignis
Ω	Ereignisraum
p	Prozentzahl
p	Preis
p.a.	per annum
P(…)	Wahrscheinlichkeit von (…)
$\mathbb{Q}^-$	Menge der negativen rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^*$	Menge der rationalen Zahlen ohne die Zahl 0
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{R}^-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Menge der geordneten Paare reeller Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^*$	Menge der reellen Zahlen ohne die Zahl 0
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$U(x)$	Umsatzfunktion
W	Prozentwert
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^-$	Menge der negativen ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^*$	Menge der ganzen Zahlen ohne die Zahl 0
$\mathbb{Z}^+$	Menge der positiven ganzen Zahlen

Kurzbeschreibung und Lernziele

Im vorliegenden begleitenden Studientext Mathematik Schulwissen wird das für das Studium relevante Schulwissen aus der Mathematik wiederholt.

Angesprochen werden die Themenbereiche

- Arithmetik,
- Funktionen in einer Variablen,
- Grundlagen der Zinsrechnung,
- Grundlagen der Linearen Algebra,
- Grundzüge der Analysis sowie
- Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lernziele

Der Studierende soll

- mit der Arithmetik vertraut sein,
- Gleichungen und Ungleichungen umformen und
- Polynome lösen können. Er soll die
- lineare sowie exponentielle Verzinsung verstehen und die
- zeitliche Verteilung von Finanzmitteln beherrschen. Er soll mit
- Matrizen, Vektoren und linearen Gleichungssystemen umgehen und ein
- Lineares Programm grafisch lösen können. Auf dem Gebiet der
- Differential- und Integralrechnung soll er sich ebenso auskennen wie in den
- Grundlagen der Mengenlehre sowie auf dem Gebiet der
- Wahrscheinlichkeitsrechnung inkl.
- Kombinatorik.

Literaturhinweise

Fischer, Gerd (2013): Lineare Algebra, Braunschweig.

Kemnitz, Arnfried (2013): Mathematik zum Studienbeginn, Braunschweig.

Opitz, Otto (2011): Mathematik, München.

Schwarze, Jochen (2010): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 1-3, Berlin.

Tietze, Jürgen (2013): Einführung in die Finanzmathematik, Wiesbaden.

Wewel, Max C. (2010): Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL, Hallbergmoos.

1 Arithmetik

Zusammenfassung

- von Kapitel 1 -

Wichtige Teilgebiete auf dem Gebiet der Arithmetik sind:

- Elementare mathematische Zeichen,
- Zahlenmengen,
- Rechenoperatoren und Grundgesetze,
- Termumformungen,
- Mittelwerte,
- Potenzen und Wurzeln,
- die Euler'sche Zahl,
- Logarithmen sowie
- Summen- und Produktzeichen.

Lernziele (des Kapitels 1)

Der Studierende soll

- mit der Arithmetik vertraut sein und mit dem
- grundlegenden Handwerkszeug umgehen können.

Literaturhinweise

Kemnitz, Arnfried (2013): Mathematik zum Studienbeginn, Braunschweig.

Opitz, Otto (2011): Mathematik, München.

Schwarze, Jochen (2010): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 1-3, Berlin.

1.1 Elementare mathematische Zeichen

Als Basis für das Modul Mathematik Schulwissen sind in der folgenden Übersicht ausgewählte mathematische Zeichen und ihre Bedeutung kurz dargestellt.

$=$	gleich
$\neq$	ungleich
$\approx$	nahezu gleich
$:=$	wird definiert als
$<$	kleiner als
$\leq$	kleiner gleich
$>$	größer als
$\geq$	größer gleich
$\sim$	proportional zu bzw. ähnlich zu
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$\{\}$	leere Menge, auch $\varnothing$
$\varnothing$	leere Menge, auch $\{\}$
$\subset$	echte Teilmenge von
$\subseteq$	unechte Teilmenge von
$\supset$	echte Obermenge von
$\supseteq$	unechte Obermenge von
$\not\subset$	nicht Teilmenge von
$\cap$	geschnitten mit
$\cup$	vereinigt mit
$\setminus$	ohne
$\{a; b\}$	Menge mit den Elementen a und b
$\{x \mid ...\}$	Menge aller x, für die gilt
(a, b)	offenes Intervall, auch $]a, b[$
$]a, b[$	offenes Intervall, auch (a, b)
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b]$	halboffenes Intervall, auch $]a, b]$
$[a, b)$	halboffenes Intervall, auch $[a, b[$
$\times$	kartesisches Produkt
$\lvert a\rvert$	Betrag von a
$\sqrt{a}$	Wurzel aus a
∞	unendlich
π	pi mit $\pi \approx 3{,}14159265$

e	Euler'sche Zahl e ≈ 2,718281828
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\rightarrow$	wird abgebildet auf
$\circ$	verkettet mit
$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt
	Summenzeichen als Abkürzung für
	Produktzeichen als Abkürzung für

1.2 Zahlenmengen

In der Mathematik gibt es so genannte Standardmengen, welche die Zahlenvielfalt aufgrund ihrer Eigenschaften in bestimmte Gruppierungen einteilen. Im Folgenden werden diese kurz dargestellt.

Menge der natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen enthält alle ganzen Zahlen größer oder gleich Null. Für die Bezeichnung wird das Symbol $\mathbb{N}$ verwendet.

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (früher $\mathbb{N}_0$): $\{0; 1; 2; 3; ...\}$
$\mathbb{N}^*$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 (früher $\mathbb{N}$): $\{1; 2; 3; ...\}$, auch $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

Menge der ganzen Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen enthält sowohl alle positiven ganzen Zahlen (also die Menge $\mathbb{N}^*$) als auch alle negativen ganzen Zahlen sowie die Zahl Null. Für die Bezeichnung wird das Symbol $\mathbb{Z}$ verwendet.

$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen: $\{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$
$\mathbb{Z}^*$	Menge der ganzen Zahlen ohne die Zahl 0: $\{...; -2; -1; 1; 2; ...\}$, auch $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z}^+$	Menge der positiven ganzen Zahlen: $\{0; 1; 2; 3; ...\}$, auch $\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}^-$	Menge der negativen ganzen Zahlen: $\{...; -3; -2; -1; 0\}$, auch $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$

Menge der rationalen Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen enthält all diejenigen Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen. Für die Bezeichnung wird das Symbol $\mathbb{Q}$ verwendet.

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen: $\{ \frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

$\mathbb{Q}^*$ Menge der rationalen Zahlen ohne die Zahl 0: $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q}^+$ Menge der positiven rationalen Zahlen: $\{q \mid q \geq 0 \text{ und } q \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}^-$ Menge der negativen rationalen Zahlen: $\{q \mid q \leq 0 \text{ und } q \in \mathbb{Q}\}$

Beispiel:

Die Zahlen $0{,}5 = \frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{18}{37} = 0{,}486486486\ldots = 0{,}\overline{486}$ sind rationale Zahlen.

Menge der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen umfasst neben den rationalen Zahlen auch diejenigen Zahlen, die einen unendlichen, nichtperiodischen Dezimalbruch darstellen. Diese unendlichen Zahlen werden auch als irrationale Zahlen bezeichnet. Salopp formuliert besteht die Menge der reellen Zahlen also aus all denjenigen Zahlen, die sich endlich (rational) oder unendlich (irrational) als Kommazahl schreiben lassen. Für die Bezeichnung wird das Symbol $\mathbb{R}$ verwendet.

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen: $\{x \mid x = \lim_{n\to\infty} q_n , q_n \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{R}^*$ Menge der reellen Zahlen ohne die Zahl 0: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^+$ Menge der positiven reellen Zahlen: $\{x \mid x \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^-$ Menge der negativen reellen Zahlen: $\{x \mid x \leq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Menge der geordneten Paare reeller Zahlen: $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}$

Beispiel:

1) $\sqrt{2}$ ist eine reelle Zahl.

2) Die Zahl 0,23177564012... sei auf beliebig viele Stellen genau fortschreibbar (unendlich) und lässt sich nicht als Bruch darstellen. Somit gehört sie zu den reellen, aber nicht zu den rationalen Zahlen.

Zusammenhang der Mengen

Aus den Definitionen ist ersichtlich, dass die Menge der reellen Zahlen alle anderen Mengen umfasst. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge der ganzen Zahlen ist, diese wiederum eine Teilmenge der rationalen Zahlen und die rationalen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen ist.

Mathematisch lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt darstellen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Beispiel:

1) Die natürliche Zahl 2 zählt auch zu den ganzen, rationalen und reellen Zahlen.

2) Die Zahl –4 gehört sowohl zu den ganzen, den rationalen und den reellen Zahlen, aber nicht zu den natürlichen Zahlen.

3) Die Zahl –1,34 gehört sowohl zu den rationalen als auch reellen Zahlen, aber nicht zu den natürlichen Zahlen und nicht zu den ganzen Zahlen.

4) Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl, denn Brüche sind auch als Kommazahlen darstellbar:

$\frac{1}{2} = 0{,}5; \quad \frac{2}{5} = 0{,}4$

1.3 Grundgesetze

Grundrechenoperationen

Die elementaren Grundrechenarten der Mathematik sind die vier Rechenarten plus, minus, mal und geteilt durch $(+, -, \cdot, \div)$. Das Ergebnis der Addition $(+)$ wird mit Summe, das der Subtraktion $(-)$ mit Differenz, das der Multiplikation $(\cdot)$ mit Produkt und das der Division $(\div)$ mit Division bezeichnet. Addition und Subtraktion sind Rechenoperationen der 1. Ordnung, Multiplikation und Division Rechenoperationen der 2. Ordnung. Das Rechenzeichen der Multiplikation wird bei Eindeutigkeit auch häufig weggelassen.

Zu den Grundrechenoperationen zählen zudem die Rechenarten der höheren 3. Ordnung, nämlich Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung. Die Ergebnisse dieser Rechenarten heißen Potenz, Wurzel und Logarithmus. Die folgende Tabelle zeigt die Grundrechenoperationen in der Übersicht:

Rechenoperation	**Ordnung**	**Verknüpfung**	**Bezeichnung**	**Ergebnis c**
Addition	1.	$a + b = c$	a: Summand b: Summand	Summe
Subtraktion	1.	$a - b = c$	a: Minuend b: Subtrahend	Differenz
Multiplikation	2.	$a \cdot b = c$ bzw. $ab = c$	a: erster Faktor (Multiplikand) b: zweiter Faktor (Multiplikator)	Produkt
Division	2.	$\frac{a}{b} = c$, $b \neq 0$	a: Dividend b: Divisor	Division
Potenzierung	3.	$a^b = c$	a: Basis b: Exponent	Potenz
Radizierung	3.	$\sqrt[b]{a} = c$	a: Radikand b: Exponent	Wurzel
Logarithmierung	3.	$\log_b a = c$	a: Numerus b: Basis	Logarithmus

Tabelle 1.1 Grundrechenoperationen

Hierarchie der Rechenoperationen

Für die Berechnung mathematischer Ausdrücke gibt es einige Regeln, die sich nach der Hierarchie der Rechenoperationen richten:

1) Was in Klammern steht, ist stets zuerst zu berechnen.

2) Es gilt Punkt vor Strich, also Multiplikation bzw. Division vor Strich Addition bzw. Subtraktion.

3) Rechenoperationen höherer Rangordnung haben stets Vorrang vor Operationen niederer Ordnung.

Beispiel:

1) $2+3\cdot 4=14$ Es wird zuerst $3\cdot 4$ berechnet (Punkt vor Strich) und dann 2 hinzugezählt.

2) $(2+3)\cdot 4=20$ Es wird zuerst die Summe in Klammern berechnet und dann mit 4 multipliziert.

Gesetze

Für alle (nicht notwendig verschiedene) Zahlen a, b und c gelten die folgenden Gesetze, die zur Berechnung von mathematischen Ausdrücken notwendig sind:

Gesetze	**Addition**	**Multiplikation**
Kommutativgesetze (Vertauschungsgesetze):	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Assoziativgesetze (Verbindungsgesetze):	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	
Neutrale Elemente 0 bzw. 1:	$a+0=0+a=a$	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Multiplikation mit 0:	–	$a\cdot 0=0\cdot a=0$

Tabelle 1.2 Rechengesetze

Für die Multiplikation gilt weiter:

Werden zwei positive Zahlen miteinander multipliziert, so ist das Ergebnis wieder eine positive Zahl.

Werden zwei negative Zahlen miteinander multipliziert, so ist das Ergebnis eine positive Zahl („minus mal minus ergibt plus“).

Werden eine negative und eine positive Zahl miteinander multipliziert, so ist das Ergebnis eine negative Zahl („minus mal plus ergibt minus“ bzw. „plus mal minus ergibt minus“).

Bruchrechnen

Ein mathematischer Ausdruck der Form $\frac{a}{b}$ wird als Bruch bezeichnet, wobei für a und b sowohl Zahlen als auch mathematische Ausdrücke eingesetzt werden können. Per Definition darf nie durch die Zahl 0 dividiert werden, weshalb bei einem Bruch $\frac{a}{b}$ stets b ≠ 0 gelten muss. Der mathematische Ausdruck oberhalb des Bruchstrichs wird Zähler genannt, der Ausdruck unterhalb wird als Nenner bezeichnet. Bei dem Bruch $\frac{a}{b}$ ist also a der Zähler und b der Nenner.

Der Bruch $\frac{b}{a}$ stellt den Kehrbruch zu $\frac{a}{b}$ dar und es gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Brüche lassen sich erweitern (sowohl der Zähler als auch der Nenner werden dabei mit einem Wert k ≠ 0 multipliziert) und kürzen (hierbei werden beide Ausdrücke durch einen Wert k ≠ 0 dividiert).

Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ Kürzen: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$ jeweils für k ≠ 0

Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man ihn mit dem Kehrbruch multipliziert. Analog gilt demnach für die Multiplikation und Division von Brüchen (jeweils Nenner ≠ 0):

Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$ Division: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$

Brüche, die den gleichen Nenner haben, werden als gleichnamige Brüche bezeichnet. Brüche mit unterschiedlichen Nennern heißen ungleichnamige Brüche.

Bei gleichnamigen Brüchen werden bei einer Addition (bzw. Subtraktion) die jeweiligen Zähler addiert (bzw. subtrahiert) und der Nenner bleibt gleich.

Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$ Subtraktion: $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$

Für die Addition bzw. Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen ist es erforderlich, diese zunächst auf einen gleichen Nenner zu bringen, um dann die Rechenoperation analog gleichnamiger Brüche durchführen zu können. Der Ausdruck $b \cdot d$ wird auch als Hauptnenner bezeichnet.

Addition / Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Beispiel:

1) Erweitern: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$

2) Kürzen: $\frac{6}{8} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{8}{2}} = \frac{3}{4}$

3) Multiplikation: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$

4) Division: $\frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{6 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}$

5) Addition: $\frac{3}{29} + \frac{5}{29} = \frac{3+5}{29} = \frac{8}{29}$

6) Addition: $\frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{4+15}{20} = \frac{19}{20}$

1.4 Termumformungen

Ein mathematischer Ausdruck, welcher aus Zahlen, Variablen und mathematischen Operationen besteht, wird als Term bezeichnet. Um solche Ausdrücke berechnen zu können, sind oftmals Vereinfachungen, Umformungen oder Zerlegungen der Terme nötig. Für häufig vorkommende Ausdrücke gibt es verschiedenes Handwerkszeug, von welchen im Folgenden die so genannten binomischen Formeln und die Zerlegung in Faktoren vorgestellt werden.

Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiel:

1) 1. Binom: $8 \cdot (3x+2) + 9x^2$

$= 24x + 16 + 9x^2 = 16 + 24x + 9x^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3x + (3x)^2 = (4+3x)^2$

2) 2. Binom: $4x^2y^2 - 36xy + 81 = (2xy - 9)^2$

3) 3. Binom: $(7+2z) \cdot (7-2z) = 49 - 4z^2$

Faktorzerlegung

Ausklammern: $ab + ac - ad = a \cdot (b + c - d)$

Linearfaktoren: $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$

Beispiel:

1) Der Term 30x + 15y – 3 lässt sich in die beiden Faktoren 3 und (10x + 5y -1) zerlegen:

$30x + 15y - 3 = 3 \cdot 10x + 3 \cdot 5y - 1 \cdot 3 = 3 \cdot (10x + 5y - 1)$

2) Der Term $49z^2$ – 35z + 6 lässt sich in die beiden Faktoren (7z – 2) und (7z – 3) zerlegen:

$$49z^2 - 35z + 6 = (7z)^2 - 5 \cdot 7z + 2 \cdot 3 = (7z)^2 - (2+3) \cdot 7z + 2 \cdot 3 = (7z-2)(7z-3)$$

1.5 Mittelwerte

Das arithmetische Mittel mehrerer Werte berechnet sich aus der Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl und wird auch als Durchschnitt bezeichnet. Das geometrische Mittel findet vor allem bei Wachstumsraten Anwendung und berechnet sich aus der n-ten Wurzel des Produktes aller n Werte.

Arithmetisches Mittel

von 2 Zahlen: $m_a = \dfrac{a+b}{2}$

von n Zahlen: $m_a = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$

Geometrisches Mittel

von 2 Zahlen: $m_g = \sqrt{a \cdot b}$

von n Zahlen: $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$

1.6 Potenzen und Wurzeln

Potenz

Für die n-te Potenz von x wird x^n definiert als $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n-mal}} = x \cdot x^{n-1}$

Weiter gilt per Definition $x^1 = x$, $x^0 = 1$, $0^0 = 1$.

Das Potenzieren ist damit lediglich eine abkürzende Schreibweise für eine mehrmalige, hintereinander ausgeführte Multiplikation derselben Zahl. Für diese Rechenart ergeben sich wiederum einige Gesetze:

Monotoniegesetz

Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n$.

Potenzgesetze

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ $\qquad$ $x^n \cdot y^n = (xy)^n$

$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ $\qquad$ $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}} \qquad \text{bzw.} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n}$$

$$\left(x^m\right)^n = x^{mn} = \left(x^n\right)^m$$

Wurzel

Das Wurzelziehen ist die Umkehrung zur Rechenart Potenzieren. Per Definition ist für n $\in \mathbb{N}^*$ und x ≥ 0 die n-te Wurzel aus x die eindeutig bestimmte, nicht-negative reelle Zahl, deren n-te Potenz x ist:

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$$

Ist n = 2, so spricht man von der Quadratwurzel und schreibt auch $\sqrt{x}$.

Hier gilt $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Analog der Gesetze bei Potenzen ergeben sich die folgenden Gesetze für Wurzeln:

Monotoniegesetz

Für n $\in \mathbb{Z}$ und x, y $\in \mathbb{R}$ gilt: $0 < x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

Wurzelgesetze

Für m, n, k $\in \mathbb{N}^*$ und x, y $\in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[mn]{x^{m+n}} \qquad \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

$$\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x^{n-m}} \quad \text{für } x \neq 0 \qquad \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad \text{für } y \neq 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \qquad \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} \qquad \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$$

Weitere Gesetze

Für n $\in \mathbb{N}^*$, n ≥ 2 und x $\in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

Beispiel:

1) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-3} = 2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 3^{-3} = 2^{3-1} \cdot 3^{2-3} = 2^2 \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3}$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\right)^4 = 2^4 = 16$

3) $\frac{4x^6 y^7 z^{12}}{12x^5 z^{13} y^8} = \frac{1}{3} x^{6-5} y^{7-8} z^{12-13} = \frac{x}{3yz}$

4) $\frac{81m^{-2}n^3}{15a^2b^3} \cdot \frac{6a^2b^{-1}}{27(mn)^3} = \frac{81n^3 6a^2}{15a^2b^3m^2 27m^3n^3b} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a^2n^3}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot a^2b^4m^5n^3} = \frac{6}{5b^4m^5}$

5) $x^{0,5} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

6) $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

7) $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2} = \sqrt{(2x-3y)^2} = |2x - 3y|$

8) $\sqrt{\sqrt{\frac{81x^4}{y^6}}} = \sqrt{\frac{9x^2}{y^3}} = \frac{3x}{y\sqrt{y}}$

9) $\sqrt[4]{y\sqrt[5]{x^2}} = \sqrt[4]{y\,x^{\frac{2}{5}}} = y^{\frac{1}{4}}x^{\frac{2}{20}} = y^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{10}}$

10) $\frac{25x-49y}{5\sqrt{x}+7\sqrt{y}} = \frac{(25x-49y)(5\sqrt{x}-7\sqrt{y})}{(5\sqrt{x}+7\sqrt{y})(5\sqrt{x}-7\sqrt{y})} = \frac{(25x-49y)(5\sqrt{x}-7\sqrt{y})}{(25x-49y)} = (5\sqrt{x}-7\sqrt{y})$

11) $\frac{\sqrt{xy^2}}{x\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy^2}}{\sqrt{x^2y}} = \sqrt{\frac{xy^2}{x^2y}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$

1.7 Euler'sche Zahl

Eine Funktion der Form $f(x) = a^x$ heißt Exponentialfunktion, da die betrachtete Größe im Zeitverlauf um einen festen Faktor wächst (oder fällt). Diese Art von Funktionen spielen in den Wirtschaftswissenschaften eine bedeutende Rolle: wirtschaftliches Wachstum, finanzmathematische Vorgänge, statistische Betrachtungen, Bevölkerungswachstum aber auch physikalische Vorgänge wie radioaktiver Zerfall oder biologische Vorgänge können damit beschrieben werden.

Als wichtigste Basis einer Exponentialfunktion hat sich dabei nicht etwa die Zahl 2 (Computer) oder 10 (Dezimalsystem) erwiesen, sondern eine irrationale Zahl etwas größer als 2,718, die sogenannte

Euler'sche Zahl

Die zu dieser Basis e gehörende Exponentialfunktion heißt

natürliche Exponentialfunktion

Der grafische Verlauf der beiden Funktionen und sind in der folgenden Grafik dargestellt.

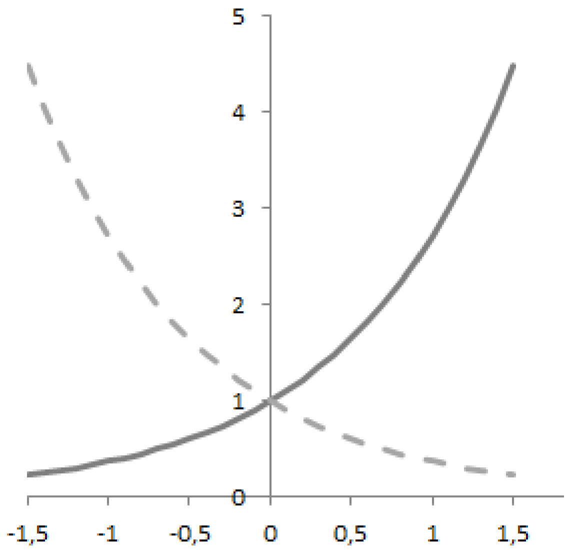


Abbildung 1.1 Die natürliche Exponentialfunktion

1.8 Logarithmen

Als Logarithmus $\log_b x$ definiert man die eindeutig bestimmte reelle Zahl, mit der man die Basis b potenzieren muss, um x zu erhalten:

$$y = \log_b x \iff b^y = x$$

Per Definition gilt weiter:

$$b^{\log_b x} = x \qquad \log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0 \qquad \log_b(b^n) = n$$

Für $\log_{10} x$ schreibt man auch lg x, für $\log_e x$ auch ln x (natürlicher Logarithmus) und es gilt:

$$e^{\ln x} = x \qquad \ln e = 1 \qquad \ln 1 = 0 \qquad \ln(e^n) = n$$

Auch für diese Rechenart ergeben sich einige Gesetze:

Monotoniegesetz

Für $x, y \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt:

$0 < x < y \Rightarrow \quad \log_b x < \log_b y \quad$ falls $b > 1$

$\log_b x > \log_b y$ falls b < 1

Logarithmengesetze

Für x, y $\in \mathbb{R}^+$, r $\in \mathbb{R}$, b $\in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \qquad \log_b (\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b (x^r) = r \cdot \log_b x \qquad \log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$$

$$\log_b \frac{x}{y} = -\log_b \frac{y}{x}$$

Beispiel:

1) $\log_8 64 = \log_8 (8^2) = 2$

2) $\log_6 \frac{1}{36} = \log_6 1 - \log_6 36 = \log_6 1 - \log_6 (6^2) = \log_6 1 - 2 = 0 - 2 = -2$

oder $\log_6 \frac{1}{36} = -\log_6 36 = -\log_6 (6^2) = -2$

3) $\log_{\frac{1}{5}} 25 + \log_4 64 = \log_{\frac{1}{5}} (5^2) + \log_4 (4^3) = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5^2}\right)^{-1} + 3 = -\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 3 = -2 + 3 = 1$

1.9 Summenzeichen und Produktzeichen

Für Summen, die sich aus mehreren Argumenten zusammensetzen, ist es üblich, eine abkürzende Notation zu verwenden. Gewöhnlich wird hierfür der griechische Buchstabe $\sum$ (Sigma) als Symbol verwendet und die Summe folgendermaßen notiert:

Dabei ist i ein beliebiger Buchstabe und wird als Summationsindex oder auch Laufindex bezeichnet, welcher nacheinander schrittweise die angegebenen Zahlen von unterhalb bis oberhalb des Summenzeichens durchläuft. Das bedeutet der Index i beginnt bei 1 und der Term nach dem Summenzeichen wird mit diesem Index durchgeführt, in diesem Fall x_1. Dann wird ein Summenzeichen gesetzt (+), der Index um 1 auf 2 erhöht und wiederum der Term nach dem Summenzeichen mit dem erhöhten Index 2 durchgeführt, also x_2. Dies geschieht solange, bis der Endwert, der oberhalb des Summenzeichens angegeben ist, erreicht wird, in diesem Fall i=n, also x_n. Somit ist obige Notation die Abkürzung für:

Beispiel:

Berechnen Sie die Summen und und .

Das Summenzeichen findet in den Wirtschaftswissenschaften sehr häufig Anwendung, so z.B. beim arithmetischen Mittel, bei der Kapitalwertmethode, bei Preisindizes, in der Rentenrechnung oder ganz allgemein bei der Betrachtung von Reihen.

Analog gibt es für die Multiplikation von mehreren Termen das sogenannte Produktzeichen, symbolisiert durch ein großes Pi:

Beispiel:

Berechnen Sie die Produkte und .

Zusammenfassung
- von Kapitel 2 -

Wichtige Teilgebiete im Umgang mit Funktionen in einer Variablen sind:

- Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Ungleichungen sowie
- Polynome n-ten Grades.

Lernziele
Der Studierende soll

- Gleichungen und
- Ungleichungen umformen,
- Lineare Gleichungen,
- Quadratische Gleichungen sowie
- Polynome höheren Grades unter bestimmten Voraussetzungen durch Polynomdivision lösen können.

Literaturhinweise
Kemnitz, Arnfried (2013): Mathematik zum Studienbeginn, Braunschweig.
Opitz, Otto (2011): Mathematik, München.
Schwarze, Jochen (2010): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 1-3, Berlin.

2.1 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Sind zwei Terme gleichwertig, so spricht man von einer Gleichung und schreibt $T_1 = T_2$. Werden auf beiden Seiten der Gleichung dieselben zulässigen Rechenoperationen durchgeführt, so handelt es sich um Äquivalenzumformungen. Für diese äquivalenten, also gleichwertigen Umformungen gibt es einige Grundregeln:

Addition / Subtraktion einer Zahl a:

$$T_1 = T_2 \qquad \big| \pm a$$

$$T_1 \pm a = T_2 \pm a$$

Multiplikation mit einer Zahl a ≠ 0:

$$T_1 = T_2 \qquad \big| \cdot a$$

$$T_1 \cdot a = T_2 \cdot a$$

Division durch eine Zahl a ≠ 0:

$$T_1 = T_2 \qquad \big| : a$$

$$\frac{T_1}{a} = \frac{T_2}{a}$$

Als lineare Gleichung wird eine algebraische Gleichung bezeichnet, bei welcher die Variable x in keiner höheren als der 1. Potenz vorkommt. Die allgemeine Form der linearen Gleichung ist demnach:

Allgemeine lineare Gleichung: für a, b ∈ ℝ und a ≠ 0

Durch Äquivalenzumformungen lässt sich jede lineare Gleichung in folgende Normalform überführen:

Normalform der linearen Gleichung: – für a, b ∈ ℝ und a ≠ 0

Löst man diese Gleichung nach x auf, so erhält man für die Lösungsmenge einer linearen Gleichung den Wert $-\frac{b}{a}$.

Beispiel:

1) $5x - 7 = 8 \qquad \big| +7$

$5x = 15 \qquad \big| :5$

$x = 3$

2) $3x+10 = 18-x \quad \Big| -10+x$

$4x = 8 \quad \Big| :4$

$x = 2$

3) $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} \qquad \Big| \cdot (x+2)\cdot x \cdot (x-1) \qquad$ [Hauptnenner]

$x(x-1) = 2(x+2)(x-1) - (x+2)x$

$x^2 - x = 2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 - 2x$

$x^2 - x = x^2 - 4 \qquad \Big| -x^2$

$-x = -4 \qquad \Big| \cdot (-1)$

$x = 4$

2.2 Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Gehorchen zwei Terme einer der Relationen „größer als“ (>) oder „kleiner als“ (<), so spricht man von einer Ungleichung und schreibt $T_1 > T_2$ bzw. $T_1 < T_2$. Ist zusätzlich die Gleichheit der beiden Terme erlaubt, so verwendet man die beiden Relationen „größer oder gleich“ (≥) bzw. „kleiner oder gleich“ (≤).
Analog der Grundregeln bei Gleichungen können auch bei Ungleichungen Äquivalenzumformungen durchgeführt werden. Allerdings ergeben sich hier für die Multiplikation bzw. Division mit negativen Zahlen folgende Sonderfälle:

Multiplikation mit einer Zahl a > 0:

$T_1 < T_2 \quad \Big| \cdot a \qquad\qquad T_1 > T_2 \quad \Big| \cdot a$

$T_1 \cdot a < T_2 \cdot a \qquad\qquad T_1 \cdot a > T_2 \cdot a$

Multiplikation mit einer Zahl a < 0:

$T_1 < T_2 \quad \Big| \cdot a \qquad\qquad T_1 > T_2 \quad \Big| \cdot a$

$T_1 \cdot a > T_2 \cdot a \qquad\qquad T_1 \cdot a < T_2 \cdot a$

D.h. bei Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Division durch eine Zahl a > 0:

$T_1 < T_2 \quad \Big| :a \qquad\qquad T_1 > T_2 \quad \Big| :a$

$\dfrac{T_1}{a} < \dfrac{T_2}{a} \qquad\qquad \dfrac{T_1}{a} > \dfrac{T_2}{a}$

Division durch eine Zahl a < 0:

$$T_1 < T_2 \quad \Big| : a \qquad\qquad T_1 > T_2 \quad \Big| : a$$

$$\frac{T_1}{a} > \frac{T_2}{a} \qquad\qquad \frac{T_1}{a} < \frac{T_2}{a}$$

D.h. bei Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Merke:
Bei Multiplikation mit oder Division durch eine negative Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Als lineare Ungleichung wird eine algebraische Ungleichung bezeichnet, bei welcher die Variable x in keiner höheren als der 1. Potenz vorkommt. Jede lineare Ungleichung kann durch äquivalente Umformungen in die allgemeine lineare Form überführt werden:

Allgemeine lineare Ungleichung für a, b $\in \mathbb{R}$ und a $\neq$ 0:

$$ax + b < 0 \quad \text{bzw.} \quad ax + b > 0$$

$$ax + b \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad ax + b \geq 0$$

Im Gegensatz zu den Lösungsmengen von Gleichungen besteht die Lösungsmenge von Ungleichungen häufig nicht nur aus wenigen Zahlen, sondern aus Intervallen, die sich aufgrund verschiedener Fallunterscheidungen ergeben. Diese Fallunterscheidungen werden nötig, wenn man Äquivalenzumformungen mit unbekannten Parametern durchführt und bei Multiplikation bzw. Division unterscheiden muss, ob es sich um positive oder negative Parameter handelt.

Demnach ergeben sich für die oben dargestellten allgemeinen linearen Ungleichungen nach Subtraktion von b und Division durch a folgende Lösungsmengen für x:

1. Fall für a > 0:

$$x < -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad x > -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$$

$$x \leq -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right] \qquad \text{bzw.} \qquad x \geq -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left[-\frac{b}{a}; \infty\right)$$

2. Fall für a < 0:

$$x > -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left(-\frac{b}{a}; \infty\right) \qquad \text{bzw.} \qquad x < -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$$

$$x \geq -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left[-\frac{b}{a}; \infty\right) \qquad \text{bzw.} \qquad x \leq -\frac{b}{a} \quad also \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$$

Zudem gelten die folgenden Beziehungen:

$$a \cdot b > 0 \;\Rightarrow\; a > 0, b > 0 \quad \mathit{oder} \quad a < 0, b < 0$$

$$a \cdot b < 0 \;\Rightarrow\; a > 0, b < 0 \quad \mathit{oder} \quad a < 0, b > 0$$

Beispiel:

1) $6x + 2 > -4 \qquad | -2$

$6x > -6 \qquad | :6$

$x > -1$ also x ∈ (-1; ∞)

2) $-\frac{1}{2}x + 13 \geq 2 \qquad | -13$

$-\frac{1}{2}x \geq -11 \qquad | \cdot(-2)$

$x \leq 22$ also x ∈ (-∞; 22]

3) $\frac{x-5}{x+2} \geq 0$

Da nicht durch 0 geteilt werden darf gilt x + 2 ≠ 0, d.h. x ≠ –2.

$\frac{x-5}{x+2} \geq 0 \qquad | \cdot(x+2)$

1. Fall: (x + 2) > 0, d.h. x > –2

$x - 5 \geq 0 \qquad | +5$

$x \geq 5$

Also gilt für x aus der Fallunterscheidung x > –2 und aus dem Ergebnis der Ungleichung x ≥ 5.

D.h. als Lösungsmenge L_1 ergibt sich: $L_1 = (-2; \infty) \cap [5; \infty) = [5; \infty)$

2. Fall: (x + 2) < 0, d.h. x < –2

$x - 5 \leq 0 \qquad | +5$

$x \leq 5$

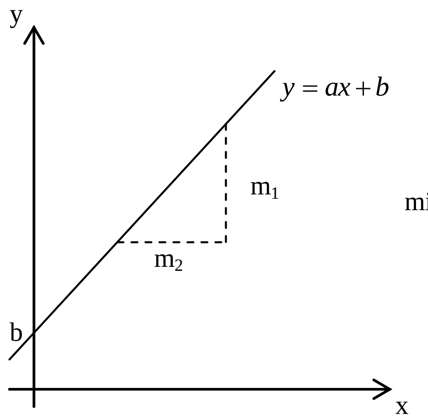
Also gilt für x aus der Fallunterscheidung x < –2 und aus dem Ergebnis der Ungleichung x ≤ 5.

D.h. als Lösungsmenge L_2 ergibt sich: $L_2 = (-\infty; -2) \cap (-\infty; 5] = (-\infty; -2)$

Insgesamt ergibt sich demnach für die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty; -2) \cup [5; \infty) = \mathbb{R} \setminus [-2; 5)$

2.3 Lineare Funktionen

Wird die allgemeine Form der linearen Gleichung als Funktion $y = ax + b$ interpretiert und in ein Koordinatensystem (= Achsenkreuz) übertragen, so stellt a die Steigung der Geraden und b den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse dar.



mit $a = \frac{m_1}{m_2}$

Abbildung 2.1 Lineare Funktion

Ist dabei a > 0, so steigt die Funktion mit zunehmenden Werten für x an, bei a < 0 handelt es sich um eine fallende Funktion.

Die x-Achse wird häufig auch als Abszisse bezeichnet, die y-Achse als Ordinate.

Ist lediglich die Steigung a einer linearen Funktion bekannt und ein Punkt mit den Koordinaten (x_1; y_1) gegeben, so lässt sich die Funktionsgleichung $y = a \cdot x + b$ über die so genannte Punktsteigungsform berechnen, indem man diese nach y auflöst:

Punktsteigungsform: $a = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ für $x_1 \neq x$

Sind lediglich die Koordinaten zweier Punkte P(x_1; y_1) und Q(x_2 y_2) einer linearen Funktion gegeben, so lässt sich die Funktionsgleichung über die Zweipunkteform ermitteln, indem man diese nach y auflöst:

Zweipunkteform: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ für $x_2 \neq x_1$, $x_1 \neq x$

Beispiel:
In einem kleinen gallischen Dorf produziert Obelix Hinkelsteine. Die Produktion von 100 Hinkelsteinen kostet ihn 1.300 Sesterzen, die Produktion von 10 Hinkelsteinen 220 Sesterzen. Wie lautet die Kostenfunktion für die Produktion von Hinkelsteinen?
Gegeben: x_1 = 100, y_1 = 1.300, x_2 = 10, y_2 = 220
Gesucht: a, b, $y = ax + b$
Einsetzen in die Zweipunkteform ergibt:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \Leftrightarrow \frac{220 - 1.300}{10 - 100} = \frac{1.300 - y}{100 - x} \Leftrightarrow \frac{-1.080}{-90} = \frac{1.300 - y}{100 - x} \Leftrightarrow 12 = \frac{1.300 - y}{100 - x}$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot (100 - x) = 1.300 - y \Leftrightarrow y = 1.300 - 12 \cdot (100 - x) \Leftrightarrow y = 1.300 - 1.200 + 12x = 12x + 100$$

Die Kostenfunktion lautet $y = 12x + 100$.

2.4 Quadratische Gleichungen

Als quadratische Gleichung wird eine algebraische Gleichung bezeichnet, bei welcher die Variable x in keiner höheren als der 2. Potenz vorkommt. Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung lautet:

Allgemeine Form: für a, b $\in \mathbb{R}$, a $\neq$ 0

Als Lösungsmenge für diese Gleichung ergibt sich L = {x_1; x_2} mit

Lösung: $$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Umgangssprachlich wird dieser Lösungsterm auch als „Mitternachtsformel“ bezeichnet.
Der Wert der Diskriminanten D (= Term unter der Wurzel, also D = b^2 – 4ac) bestimmt die Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung. Ist D > 0 so hat die quadratische Gleichung zwei reelle Lösungen L = {x_1; x_2}, für D = 0 besitzt die Gleichung nur eine reelle Lösung L = {x_1} (denn die beiden Lösungen fallen zusammen: $x_1 = x_2$) und für D < 0 gibt es keine reelle Lösung L = {}.

Beispiel:
1) Lösen Sie die folgenden Gleichungen und bestimmen Sie die Lösungsmenge L:

a) $2x^2 - 3x = 27$

$2x^2 - 3x - 27 = 0$ also a = 2 b = –3 c = –27

$$x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-27)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - (-216)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{3 \pm 15}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 + 15}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - 15}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

L = {–3; 4,5}

b) $x^4 - 22x^2 - 15 = 7x^2 - 115$

$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

Substitution mit x^2 = u liefert

$u^2 - 29u + 100 = 0$ mit a = 1 b = –29 c = 100

$$u_{1/2} = \frac{-(-29) \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2}$$

$$u_1 = \frac{29 + 21}{2} = 25$$

$$u_2 = \frac{29 - 21}{2} = 4$$

Aufgrund der Substitution gilt $x^2 = u$ und damit:

$$x_{1/2} = \sqrt{25} = \pm 5$$

$$x_{3/4} = \sqrt{4} = \pm 2$$

L = {–5; –2; 2; 5}

c) $\frac{x}{x-3} + \frac{5}{x} = \frac{3}{x-3}$

Da nicht durch 0 geteilt werden darf, muss $x - 3 \neq 0$ und $x \neq 0$ gelten,

d.h. der Definitionsbereich lautet $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

$$x \cdot x + 5 \cdot (x - 3) = 3x$$

$$x^2 + 5x - 15 = 3x$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

$$x_1 = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

L = {–5}, denn $3 \notin D$

2) Wie ist die reelle Zahl a zu wählen, damit die Gleichung $x^2 + 4x + a = 0$ zwei verschiedene / genau eine / keine reelle(n) Nullstelle(n) besitzt?

Die Anzahl der Nullstellen wird von der Diskriminanten D bestimmt:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 16 - 4a$$

Zwei Lösungen: D > 0 und damit 16 – 4a > 0, nach a auflösen ergibt a < 4

Eine Lösung: D = 0 und damit 16 – 4a = 0, nach a auflösen ergibt a = 4

Keine Lösung: D < 0 und damit 16 – 4a < 0, nach a auflösen ergibt a > 4

Zerlegung in Linearfaktoren

Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, so lässt sich dieser Term in folgende Linearfaktoren zerlegen:

Produktform: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Diese Form heißt auch Produktform der quadratischen Gleichung. Da ein Produkt genau dann 0 ergibt, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist, sind bei dieser Darstellung die Nullstellen x_1 bzw. x_2 direkt aus dem Term ablesbar.

Teilt man die allgemeine Form der quadratischen Gleichung durch a, so erhält man die Normalform (oder auch normierte Form) der quadratischen Gleichung und schreibt für $\frac{b}{a} = p$ und für $\frac{c}{a} = q$.

Normierte Form: $x^2 + px + q = 0$ für p, q $\in \mathbb{R}$

Als Lösungsmenge für diese Gleichung ergibt sich L = {x_1; x_2} mit

Lösung: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Die Anzahl der Lösungen ergibt sich wiederum aus dem Wert der Diskriminanten:

$D = \frac{p^2}{4} - q > 0$ 2 Lösungen L = {x_1; x_2}

$D = \frac{p^2}{4} - q = 0$ 1 (doppelte) Lösung L = {x_1} = {x_2}

$D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ keine Lösung L = {}

Und auch die Produktform ergibt sich aufgrund der Zerlegung in Linearfaktoren als

Produktform: $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ für p, q $\in \mathbb{R}$

Hierbei sind wiederum x_1 und x_2 die Nullstellen der quadratischen Gleichung und lassen sich direkt aus dem Term ablesen.

Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 die Lösungselemente der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für p, q $\in \mathbb{R}$ so gilt:

$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Der Satz von Vieta ist nur auf die Normalform einer quadratischen Gleichung anwendbar und ermöglicht es, einfache quadratische Terme sehr zügig in Linearfaktoren zu zerlegen, um daraus die Lösungen für die Gleichung abzulesen.

Beispiel:

1) Bestimmen Sie die Lösungen für $2x^2 - 6x = 0$ mittels Zerlegung in Linearfaktoren.

$2x^2 - 6x = 2x \cdot (x-3)$

Ein Produkt ergibt 0, wenn mind. einer der Faktoren gleich 0 ist. Also:

$2x = 0$ oder $x - 3 = 0$ und damit $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

L = {0; 3}

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x^2 - 7x + 10 = 0$

p = –7 und q = 10, Einsetzen ergibt:

$$x_{1/2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$x_1 = 5$

$x_2 = 2$

L = {2; 5}

Selbstverständlich erhalten Sie dieselbe Lösungsmenge über die Mitternachtsformel.

3) Wie lautet die quadratische Gleichung, wenn ihre Nullstellen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ liegen?

Einsetzen der Lösungen als Linearfaktoren: $(x-1)(x+2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$

2.5 Polynome

Algebra beschäftigt sich mit dem Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, die lediglich elementare Operationen enthalten. Die allgemeine Form einer algebraischen Gleichung lautet:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Die Zahlen a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 stehen für beliebige reelle (oder komplexe) Zahlen und heißen Koeffizienten. Ist x^n die höchste auftretende Potenz der Variablen x, so spricht man von einer Gleichung vom Grad n. Eine algebraische Gleichung vom Grad 1 wird als lineare Gleichung, eine vom Grad 2 als quadratische Gleichung und eine Gleichung vom Grad 3 als kubische Gleichung bezeichnet.

Polynom n-ten Grades

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ und $a_n \neq 0$. Als Polynom n-ten Grades wird dann der folgende Ausdruck bezeichnet:

Polynom n-ten Grades: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Die Lösungen der zugehörigen Gleichung $P_n(x) = 0$ heißen Nullstellen des Polynoms $P_n(x)$.

Polynomdivision

Ist x_1 eine Nullstelle des gegebenen Polynoms $P_n(x)$, so kann $P_n(x)$ mittels Polynomdivision (oder auch Partialdivision) ohne Rest durch $(x - x_1)$ geteilt werden. Man erhält dann $P_n(x) = (x - x_1)\, P_{n-1}(x)$.

Hat ein Polynom $P_n(x)$ nur ganzzahlige Koeffizienten a_i (i = 1, ..., n) so ist jede denkbare ganzzahlige Nullstelle x_1 ein Teiler von a_0.
Die Division zweier Polynome verläuft analog dem schriftlichen Dividieren von Dezimalzahlen. Dabei wird zuerst die höchste Potenz von x des Dividenden (der Ausdruck, der geteilt werden soll) durch die höchste Potenz von x des Divisors (der Ausdruck, durch welchen geteilt wird) geteilt.

Beispiel:

1) Berechnen Sie $(x^3+4x^2+x-6):(x-1)$ mit Hilfe der Polynomdivision und bestimmen Sie die Lösungsmenge von x^3+4x^2+x-6.

Also ist der Ausdruck (x^3+4x^2+x-6) der Dividend und der Ausdruck $(x-1)$ der Divisor. Man teilt demnach x^3 durch x und erhält x^2, welches man hinter das Gleichheitszeichen schreibt. Daraufhin multipliziert man den Divisor mit dem so berechneten Wert x^2 und zieht den Ausdruck vom Dividenden ab. Dieses Verfahren wird dann so lange wiederholt, bis jeder Teil des Polynoms durch den Divisor geteilt wurde:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+4x^2+\quad x\ -6):(x-1)=x^2+5x+6 \\
\underline{-(x^3-\ x^2)} \\
\qquad\quad 5x^2+\quad x \\
\qquad \underline{-(5x^2-5x)} \\
\qquad\qquad\quad 6x\ -6 \\
\qquad\qquad \underline{-(6x\ -6)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also gilt:

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$

Damit gilt $x-1=0$ oder $x^2+5x+6=0$.

Aus $x-1=0$ folgt $x_1 = 1$.

Aus $x^2+5x+6=0$ folgt mit Hilfe der Formel für quadratische Gleichungen

$$x_{2/3}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}$$ also $x_2 = -2$ und $x_3 = -3$

L = {–3; –2; 1}

2) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen von $P_5(x)=x^5+3x^4+5x^3+11x^2-20$.

Bei Bedarf kann das Polynom um die fehlenden Potenzen ergänzt werden, in diesem Fall um 0x:

$$P_5(x)=x^5+3x^4+5x^3+11x^2+0x-20$$

Das Polynom hat nur ganzzahlige Koeffizienten, weshalb jede ganzzahlige Nullstelle x_1 ein Teiler von $a_0 = -20$ ist. Es kommen also höchstens folgende ganzzahligen Teiler in Betracht:

1; –1; 2; –2; 4; –4; 5; –5; 10; –10; 20; –20;

Durch Einsetzen der Teiler in das Polynom stellt man fest, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$ Lösungselemente sind. Daher ist $P_5(x)$ ohne Rest durch $(x-1)(x+2)$ teilbar.

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

Also kann man folgende Polynomdivision durchführen:

$$\begin{array}{l}
(x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20) : (x^2 + x - 2) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10 \\
-(x^5 + x^4 - 2x^3) \\
\hline
\quad 2x^4 + 7x^3 + 11x^2 \\
\quad -(2x^4 + 2x^3 - 4x^2) \\
\hline
\qquad 5x^3 + 15x^2 \\
\qquad -(5x^3 + 5x^2 - 10x) \\
\hline
\qquad\quad 10x^2 + 10x - 20 \\
\qquad\quad -(10x^2 + 10x - 20) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Demnach ist $P_5(x) = (x^3 + 2x^2 + 5x + 10)(x-1)(x+2)$

Nun werden analog $P_5(x)$ für $P_3(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ die Nullstellen bestimmt:

Denkbare ganzzahlige Lösungselemente sind die ganzzahligen Teiler von 10 und damit 1; –1; 2; –2; 5; –5; 10; –10; die Probe liefert als Lösungselement $x_3 = -2$, also $x_3 = x_2$.

Die Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 5x + 10) : (x+2) = x^2 + 5 \\
-(x^3 + 2x^2) \\
\hline
\quad 0 + 5x + 10 \\
\quad -(5x + 10) \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

Also ist $P_3(x) = (x+2)(x^2+5)$.

$x^2 + 5 = 0$ hat jedoch keine reelle Lösung, weshalb sich das Polynom $P_5(x)$ schreiben lässt als:

$P_5(x) = (x-1)(x+2)(x+2)(x^2+5)$

Hieraus ergibt sich als Lösungsmenge für die reellen Nullstellen $L = \{-2; 1\}$

3 Grundlagen der Zinsrechnung

Zusammenfassung

- von Kapitel 3 -

Wichtige Teilgebiete der grundlegenden Zinsrechnung sind:

- Prozentrechnung,
- Lineare Zinsrechnung,
- Exponentielle Zinsrechnung sowie das
- Äquivalenzprinzip.

Lernziele

Der Studierende soll

- Prozentrechnung anwenden können, die
- lineare sowie exponentielle Verzinsung verstehen und die
- zeitliche Verteilung von Finanzmitteln und damit das Äquivalenzprinzip beherrschen.

Literaturhinweise

Tietze, Jürgen (2013): Einführung in die Finanzmathematik, Wiesbaden.

3.1 Prozentrechnung

Die Prozentrechnung ist mathematisch gesehen ein Teilgebiet der Bruchrechnung, bei welcher man sich für den Bruchteil eines bestimmten Wertes interessiert. Der Zahlenwert, von dem der Bruchteil genommen wird, heißt Grundwert G und der Anteil, der als Ergebnis interessiert, heißt Prozentwert W. Der Bruchteil an sich wird durch die Prozentzahl p beschrieben.

Für die Prozentzahl p wird häufig auch der Prozentsatz $i = \frac{p}{100}$ verwendet und man schreibt $i = p\%$.

Es gelten die folgenden grundlegenden Beziehungen:

Prozentwert W: $W = G \cdot \frac{p}{100} = G \cdot i$

Grundwert G: $G = W \cdot \frac{100}{p} = \frac{W}{i}$

Prozentzahl p: $p = \frac{W}{G} \cdot 100$

Prozentsatz i: $i = \frac{W}{G}$

Beispiel:
Eine Universität hat 2300 Studierende, wovon aufgrund der vielen naturwissenschaftlichen Studiengänge 78% männlich sind. Wie viele Studentinnen sind an dieser Universität?
G = 2300, p = 78, d.h. i = 0,78
$W = 2300 \cdot 0{,}78 = 1794$ männliche Studierende
2300 – 1794 = 506 weibliche Studierende
Es gibt 506 Studentinnen an dieser Universität.

3.2 Grundbegriffe der Zinsrechnung

Im Bankwesen sind zwei Arten von Zinsen zu unterscheiden: Sollzinsen und Habenzinsen. Unter Sollzinsen versteht man den Preis, den ein Schuldner für das Ausleihen von Kapital bezahlen muss, Habenzinsen bezeichnen den Preis, den ein Gläubiger für die leihweise Überlassung von Sparkapital erhält. Die Höhe der Zinsen ist dabei grundsätzlich vertraglich zu vereinbaren. Da es sich je nach Betrachtungswinkel um Soll- bzw. Habenzinsen handelt und sich dies nicht auf die Art der Berechnung auswirkt, wird im Folgenden der allgemeine Begriff der Zinsen verwendet.

Bei der Zinsrechnung geht es hauptsächlich um die folgenden Grundgrößen: das Anfangskapital, die Laufzeit, den Zinssatz, den absoluten Zinsbetrag sowie das Endkapital.

Grundbegriff	**Symbol**	**Maßeinheit**
Anfangskapital	K_0	Währungseinheiten z.B. Euro [€], US-Dollar [US$].
Laufzeit	n	Zeiteinheiten meistens in Jahren, evtl. auch kürzere Zeitintervalle.
Zinssatz	i	Prozent i = p% = p/100 mit p = Zinsfuß.
Zinsbetrag	z	Währungseinheiten z.B. Euro [€], US-Dollar [US$].
Endkapital	K_n	Währungseinheiten z.B. Euro [€], US-Dollar [US$].

Tabelle 3.1 Grundbegriffe der Zinsrechnung

Der Standardfall für die Messung der Laufzeit ist das Jahr. Da Kalenderjahre nicht immer gleich lang sind (Schaltjahr) und auch Monate in ihrer Länge variieren (28 bis 31 Tage), verwendet man in der Finanzmathematik in der Regel folgende standardisierte Zeitintervalle:

1 Monat	=	30	Tage
1 Quartal	=	90	Tage
1 Halbjahr	=	180	Tage
1 Jahr	=	360	Tage

Bei der Messung der Zinsen wird zwischen Zinsbetrag und Zinssatz unterschieden. Der Zinsbetrag ist dabei nichts anderes als die Differenz zwischen Endkapital und Anfangskapital, gemessen in Währungseinheiten. Der Zinssatz wird dagegen in Prozent gemessen und ist meist auf die Frist von einem Jahr bezogen (p.a. = per annum).

D.h. die Zinsrechnung an sich beschäftigt sich prinzipiell mit vier Fragestellungen:

1) Welches <u>Anfangskapital</u> wird benötigt, um bei gegebenem Zinssatz i nach einer Laufzeit von n das Endkapital K_n zu erhalten?

2) Wie <u>lange</u> ist das Anfangskapital K_0 zu einem gegebenen Zinssatz i anzulegen, um ein Endkapital von K_n zu erhalten?

3) Zu welchem <u>Zinssatz</u> ist das Anfangskapital K_0 für eine Laufzeit n anzulegen, um als Endkapital K_n zu erhalten?

4) Welches <u>Endkapital</u> erhält man, wenn das Anfangskapital K_0 für eine Laufzeit n zu einem Zinssatz i verzinst wird?

Hierbei sind jedoch verschiedene Fälle zu unterscheiden. Werden die Zinsen nach jeder Periode ausbezahlt, so handelt es sich um lineare Zinsrechung (einfache Zinsen); werden sie jeweils in den folgenden Perioden mitverzinst, so spricht man von exponentieller Zinsrechnung (Zinseszinsen).

3.3 Lineare Zinsrechnung

Bei der einfachen Zinsrechnung werden die Zinsen jeweils vom Anfangskapital zu Beginn einer Finanzaktion berechnet. Die am Ende einer Zinsperiode gutgeschriebenen Zinsen werden in der folgenden Periode nicht mitverzinst, d.h. der Zinsbetrag jeder Periode ist gleich groß. Das Kapital steigt demnach immer um den gleichen Betrag an, es wächst damit linear:

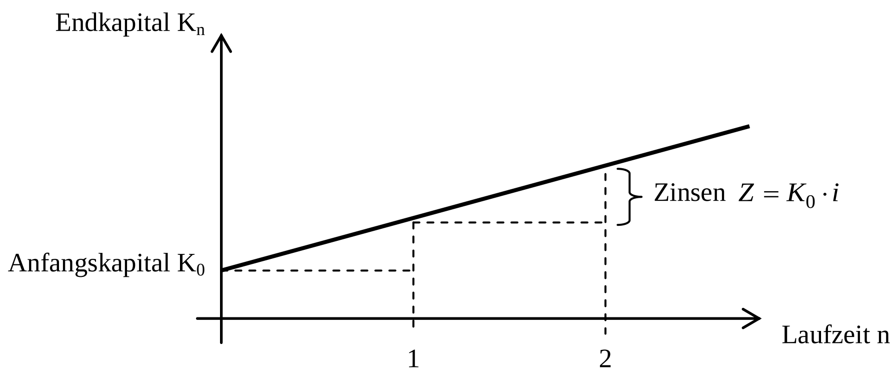


Abbildung 3.1 Kapitalzuwachs bei linearer Verzinsung

Wird also das Anfangskapital K_0 mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst, so hat der Kapitalgeber nach einem Jahr Anspruch auf Zinsen in Höhe von $K_0 \cdot i$, d.h. das Gesamtkapital nach einem Jahr beträgt $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i$. Im zweiten Jahr wird wieder nur das Anfangskapital K_0 mit dem Zinssatz i verzinst, so dass nach zwei Jahren ein Kapital von $K_2 = K_1 + K_0 \cdot i = K_0 + K_0 \cdot i + K_0 \cdot i = K_0 + 2 \cdot K_0 \cdot i$ zur Verfügung steht. Die Entwicklung des Kapitals in den folgenden Jahren verläuft analog.

Die allgemeine Formel der einfachen Zinsrechnung lautet demnach:

Einfache Zinsrechnung: $$K_n = K_0 + \underbrace{n \cdot K_0 \cdot i}_{\text{Zinsen}} = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

Diese Formel lässt sich mit Hilfe von Äquivalenzumformungen nach allen enthaltenen Größen auflösen, so dass je nach Fragestellung die folgenden Formeln Anwendung finden:

Anfangskapital: $$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i}$$

Laufzeit: $n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i}$

Zinssatz: $i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n}$

Endkapital: $K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$

In der Praxis findet die Formel für einfache Zinsen häufig auch für Laufzeiten kleiner als ein Jahr Verwendung, d.h. die Laufzeit ist ein Bruchteil eines Jahres. Beziehen sich die Größen Zinssatz und Laufzeit auf ein Jahr, so wird die Laufzeit kleiner ein Jahr anhand folgender Formel berechnet:

Laufzeit kleiner 1 Jahr: $n = \frac{Zinstage\ der\ Laufzeit}{Zinstage\ pro\ Jahr}$

Dabei gibt es für die Berechnung der Anzahl der Zinstage verschiedene (häufig auch an bestimmte Finanzprodukte gekoppelte) Methoden, von welchen hier einige vorgestellt werden.

Deutsche Methode (30 / 360 bzw. 360 / 360):

Bei der deutschen kaufmännischen Zinsrechnung wird das Jahr zu 360 Zinstagen abgerechnet; jeder Monat hat daher 30 Zinstage. Die Zeitdifferenz t, für welche Zinsen bezahlt werden, berechnet sich aus der Differenz von Endtermin t_2 und Anfangstermin t_1 nach folgender Formel:

Zinstage der Laufzeit: $t_k = (m_k - 1) \cdot 30 + d_k$ k = 1, 2

mit Monat $m_k = \{Januar = 1,\ Februar = 2, \ldots, Dezember = 12\}$

und Tag $d_k = \{1, 2, \ldots, 29, 30\}$ (der 31. rechnet als 30)

D.h. für die Zeitdifferenz vom 15. Mai bis 16. September erhält man mit Hilfe dieser Formel:

Endtermin $t_2 = (m_2 - 1) \cdot 30 + d_2 = (9 - 1) \cdot 30 + 16 = 256$

Anfangstermin $t_1 = (m_1 - 1) \cdot 30 + d_1 = (5 - 1) \cdot 30 + 15 = 135$

Zeitdifferenz $t = t_2 - t_1 = 256 - 135 = 121$

und damit 121 Zinstage als Zeitdifferenz, die in die obige Formel für t eingesetzt werden.

Euro-Zinsmethode (actual / 360):

Diese Methode (englisch *actual* = tatsächlich, also Kalender-genau) basiert auf einer exakten Auszählung der Zinstage anhand des Kalenders, allerdings bleibt bei dieser Methode die Jahreslänge dabei konstant 360 Tage.

D.h. für die Zeitdifferenz vom 15. Mai bis 16. September erhält man

$t = 16 + 30 + 31 + 31 + 16 = 124$

und damit 124 Zinstage als Zeitdifferenz, die in die obige Formel für t eingesetzt werden.

Englische Methode (actual / actual): **n =** —— bzw. **n =** —— in Schaltjahren

Bei dieser Methode werden sowohl die Zinstage als auch die Länge des Jahres exakt nach dem Kalender berechnet.
D.h. für die Zeitdifferenz vom 15. Mai bis 16. September erhält man analog der Euro-Zinsmethode 124 Zinstage, die jedoch durch die Jahreslänge von 365 Tagen (bzw. 366 Tagen in einem Schaltjahr) dividiert werden.

Bei der Berechnung von Tageszinsen wird dabei sowohl für den Anfangstermin als auch für den Endtermin jeweils nur ein halber Tag angesetzt, so dass beispielsweise für einen Zeitraum von 15. Mai bis 27. Mai nur 12 Tage Zinstage berechnet werden. In der Praxis werden statt zwei halben Tagen häufig auch (bankspezifisch) entweder der Anfangstermin oder aber der Endtermin nicht mitgerechnet, am Ergebnis ändert sich jedoch nichts.

Selbstverständlich gibt es auch Abweichungen von oben dargestellten Regeln sowie weitere Methoden, auf die im Rahmen dieses Moduls jedoch nicht näher eingegangen wird.

Beispiel:
Asterix möchte Obelix zu seinem runden Geburtstag in zwei Jahren ein besonderes Werkzeug zur Hinkelsteinbearbeitung schenken. Dieses Werkzeug kostet bei einem bekannten Händler jedoch 120 Sesterzen. Wie viele Sesterzen muss Asterix heute anlegen, damit er bei einem Zinssatz von 5% p.a. in zwei Jahren dieses Geld zur Verfügung hat, wenn das Kapital nur einfach verzinst wird?
Gegeben: $K_n = 120$, $n = 2$, $i = 0{,}05$
Gesucht: K_0

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i} = \frac{120}{1 + 2 \cdot 0{,}05} = \frac{120}{1{,}1} \approx 109{,}09$$

Asterix muss heute 109,09 Sesterzen anlegen und darf die Zinsen, die er jährlich ausbezahlt bekommt, natürlich nicht anderweitig ausgeben.

3.4 Exponentielle Zinsrechnung

Bei der exponentiellen Verzinsung werden die Zinsen nach einem gewissen Zeitraum dem Kapital zugeschlagen und in den nächsten Perioden mitverzinst (Zinseszinseffekt). Konkret bedeutet dies, dass in der zweiten Zinsperiode die Zinsen der ersten Zinsperiode mitverzinst werden, in der dritten Zinsperiode die Zinsen der ersten und zweiten Periode und so fort. Demnach steigt das Kapital bei der Anwendung von Zinseszinsen exponentiell an.

In der folgenden Grafik wird dieser Effekt im Vergleich zur linearen Verzinsung verdeutlicht:

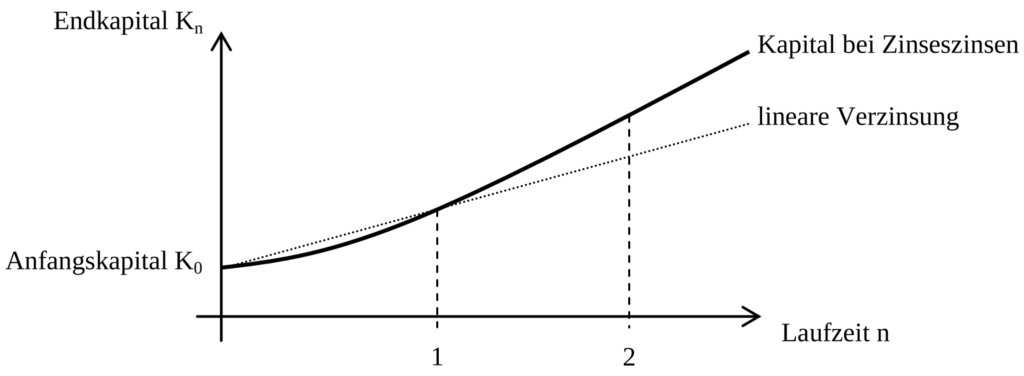


Abbildung 3.2 Kapitalzuwachs bei exponentieller Verzinsung

Die Grafik zeigt, dass die Zinseszinsrechnung bei Laufzeiten von mehr als einem Jahr und sonst gleichen Bedingungen zu einem höheren Endkapital führt als die einfache Verzinsung (= lineare Verzinsung). Wird also das Anfangskapital K_0 mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst und die Zinsen mitverzinst, so hat der Kapitalgeber nach einem Jahr Anspruch auf Zinsen in Höhe von $K_0 \cdot i$, d.h. das Gesamtkapital nach einem Jahr beträgt analog der einfachen Verzinsung $K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i)$. Im zweiten Jahr wird jedoch das gesamte Kapital K_1 mit dem Zinssatz i verzinst, so dass nach zwei Jahren ein Kapital von $K_2 = K_1 + K_1 \cdot i$ zur Verfügung steht. Einsetzen von $K_1 = K_0 \cdot (1+i)$ in die Gleichung von K_2 und Umformen ergibt $K_2 = K_0 \cdot (1+i)^2$. Die Entwicklung des Kapitals in den folgenden Jahren verläuft analog.

Die allgemeine Formel der Zinseszinsrechung lautet demnach:

Zinseszinsrechnung: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

Diese Formel lässt sich mit Hilfe von Äquivalenzumformungen nach allen enthaltenen Größen auflösen, so dass je nach Fragestellung die folgenden Formeln Anwendung finden:

Anfangskapital: $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+i)^n}$

Laufzeit: $n = \dfrac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+i)}$

Zinssatz: $i = \sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1$

Endkapital: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

Wird aus dem Anfangskapital das Endkapital berechnet, so spricht man von Aufzinsen und verwendet hierfür den so genannten Aufzinsungsfaktor:

Aufzinsungsfaktor: $(1+i)^n$

Umgekehrt spricht man bei der Berechnung des Anfangskapitals zu einem gegebenen Endkapital von Abzinsen (oder auch Diskontieren) und verwendet hierfür den so genannten Abzinsungsfaktor:

Abzinsungsfaktor: $\frac{1}{(1+i)^n}$

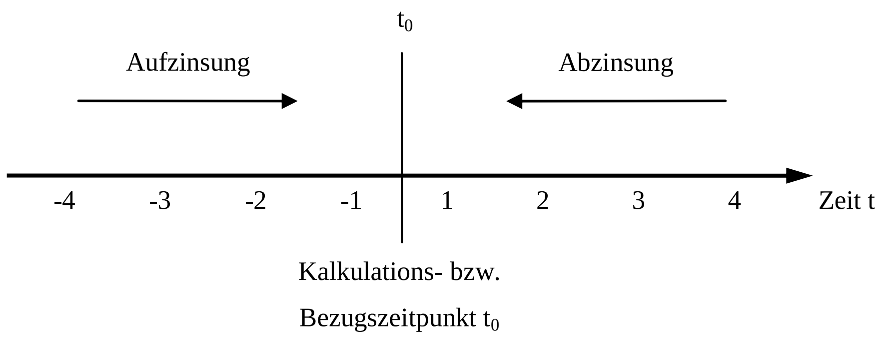
Beispiel:
Troubadix hat bei einer Konzerttournee in Lutetia 1.400 Sesterzen verdient und möchte dieses Geld nun so anlegen, dass sich der Betrag nach 10 Jahren verdoppelt hat. Wie hoch muss hierfür der Zinssatz sein, wenn die Zinsen jährlich mitverzinst werden?
Gegeben: K_0 = 1.400, n = 10, K_n = 2 K_0 = 2.800
Gesucht: i

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{2.800}{1.400}} - 1 \approx 0{,}0718 = 7{,}18\%$$

Troubadix sollte seine Gage mit mindestens 7,18% p.a. verzinsen.

3.5 Äquivalenzprinzip

In der Finanzmathematik und speziell in der Investitionsrechnung ist es häufig nötig, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallenden Zahlungen durch Aufzinsen oder Abzinsen „gleichnamig“ zu machen:



Aufzinsung:
Gesucht wird der sogenannte Endwert, Berechnung mittels Aufzinsungsfaktor:

Aufzinsungsfaktor $(1+i)^n$ mit i=Zinssatz, n=Zeit

Abzinsung:

Gesucht wird der sogenannte Barwert, Berechnung mittels Abzinsungs- oder Barwertfaktor:

$$\text{Abzinsungsfaktor } (1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{mit i=Zinssatz, n=Zeit}$$

Beispiel:

a) Sie legen heute 100 Euro auf 15 Jahre fest an, Zinssatz 5% p.a., Zinseszins. Wie viel ist aus diesem Betrag in 15 Jahren geworden?

b) In 3 Jahren benötigen Sie 800 Euro. Welchen Betrag müssen Sie heute bei einer Verzinsung von 4% p.a. (Zinseszins) anlegen?

c) Für seine besonderen Verdienste um das wohlbekannte gallische Dorf erhält Asterix bei der Rückkehr von einer seiner abenteuerlichen Reisen von Majestix einen Betrag in Höhe von 1.000 Sesterzen. Auch Obelix soll das gleiche finanzielle Dankeschön erhalten. Da er das Geld aber erst in ein paar Jahren benötigt, wird ausgemacht, dass er in 5 Jahren von Majestix einen Betrag in Höhe von 1.250 Sesterzen erhalten wird. Ist das bei einem angenommenen Zinssatz von 4% p.a. (exponentielle Verzinsung) gegenüber Asterix fair?

Äquivalenz:

Zwei Zahlungsreihen sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt t (= Vergleichs-, Kalkulations- oder Bezugszeitpunkt) den gleichen Kapitalwert aufweisen.

Problem:

Wahl des „richtigen“ Kalkulationszinsfußes:

- i.d.R. Orientierung am vergleichbaren Marktzins (je nach Zielsetzung auch darüber bzw. darunter)
- Berechnung nach durchschnittlichen Kapitalkosten (z.B. hat ein Unternehmen, das zu 60% fremdfinanziert ist und dafür 10% Zinsen bezahlt, und zu 40% eigenfinanziert ist und dafür 20% Rentabilität erwirtschaftet, durchschnittliche Kapitalkosten in Höhe von $0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}14 = 14\%$)

Es ist allgemein üblich, finanzmathematische Projekte als Zahlungsreihe zu charakterisieren. Hierbei gehen Einzahlungen als positive Werte, Auszahlungen als negative Werte in die Reihe ein, werden zum jeweiligen Zeitpunkt aufaddiert und ergeben somit den jeweiligen Saldo (oder Nettozahlungen, Cashflow). Die Zeitpunkte der Ein- und Auszahlungen seien t = 0, ..., T.

Demnach ist die Zahlungsreihe ein Vektor mit (T + 1) Komponenten und dieser wird üblicherweise mit $b = (b_o, ..., b_T)$ bezeichnet. Es ergibt sich folgende pauschalierte Grafik:

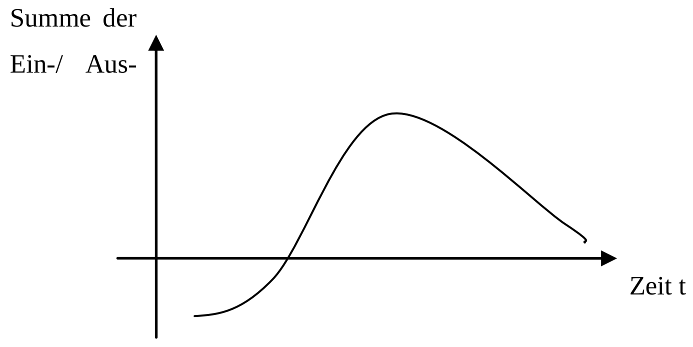


Abbildung 3.3 Pauschalisierte Zahlungsreihe einer Investition

Beispiel:

1) Finanzanlage von 50 Euro auf 2 Jahre zum Zinssatz von 4% p.a., jährliche Zinsauszahlung. Wie sieht hierfür die Zahlungsreihe aus?

(-50; 2; 52)

2) Stellen Sie die Zahlungsreihen für folgende Beispiele auf:

a) Sie legen heute 100 Euro auf 15 Jahre fest an, Zinssatz 5% p.a., Zinseszins. Wie viel ist aus diesem Betrag in 15 Jahren geworden?

(-100; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 207,89)

b) In 3 Jahren benötigen Sie 800 Euro. Welchen Betrag müssen Sie heute bei einer Verzinsung von 4% p.a. (Zinseszins) anlegen?

(-711,20; 0; 0; 800)

4 Lineare Algebra

Zusammenfassung
- von Kapitel 4 -

Wichtige Teilgebiete der Grundzüge der Linearen Algebra sind:

- Vektoren, Matrizen und Matrizenoperationen,
- Determinanten,
- Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung via
- Gauß'sches Eliminationsverfahren bzw.
- Cramer'sche Regel sowie die Lösung von
- Linearen Programmen.

Lernziele
Der Studierende soll mit

- Matrizen, Vektoren und Determinanten umgehen können,
- lineare Gleichungssysteme durch die Verfahren von Gauß und Cramer lösen können und
- Optimierungsaufgaben, auch in Textform, durch das Verfahren zur grafischen Ermittlung der Lösungsmenge bearbeiten können.

Literaturhinweise
Fischer, Gerd (2013): Lineare Algebra, Braunschweig.
Kemnitz, Arnfried (2013): Mathematik zum Studienbeginn, Braunschweig.
Opitz, Otto (2011): Mathematik, München.
Schwarze, Jochen (2010): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 1-3, Berlin.

4.1 Matrizen und Vektoren

Um komplexe (wirtschaftswissenschaftliche) Zusammenhänge übersichtlich darstellen zu können, werden häufig so genannte Matrizen verwendet. Eine solche Matrix ist im Prinzip ein Zahlenschema in Tabellenform. In den folgenden Kapiteln werden die für dieses Modul relevanten mathematischen Größen der Linearen Algebra definiert und ihre Rechenoperationen erläutert.

Eine rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ reellen Zahlen a_{ij} wird als Matrix mit m Zeilen und n Spalten oder auch kurz $m \times n$ -Matrix bezeichnet:

$m \times n$ -Matrix:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Zahlen a_{ij} heißen Elemente oder Komponenten der Matrix A. Die senkrecht untereinander stehenden Komponenten der Matrix werden auch als Spalten bezeichnet, die waagerecht nebeneinander stehenden Komponenten heißen Zeilen. Dabei ist $i = 1, \dots, m$ der Zeilenindex, $j = 1, \dots, n$ der Spaltenindex und $m \times n$ die Dimension dieser Matrix.

Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen wird als $M^{m,n}$ bezeichnet.

Besteht eine Matrix nur aus einer Spalte oder nur aus einer Zeile, so wird dieses Zahlenschema als Vektor bezeichnet. Ist in einer $m \times n$ -Matrix dabei $n = 1$, so handelt es sich um einen so genannten Spaltenvektor, bei $m = 1$ spricht man von einem Zeilenvektor:

m-dimensionaler Spaltenvektor:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

n-dimensionaler Zeilenvektor: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Ist $m = 1$ und $n = 1$, so heißt diese 1×1 -Matrix Skalar. Ein Skalar ist demnach eine reelle Zahl:

Skalar: $(a) = a$

Matrizen werden in der Regel mit Großbuchstaben, Vektoren und Skalare mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Die Elemente werden jeweils von runden Klammern umfasst.

Geometrisch gesehen kann ein reeller Spalten- bzw. Zeilenvektor als Punkt im Raum $\mathbb{R}^k$ aufgefasst werden. Für $k = 2$ lässt sich damit der Vektor (a_1, a_2) aus $\mathbb{R}^2$ in einem Achsenkreuz mit den Achsen x_1 und x_2 verdeutlichen:

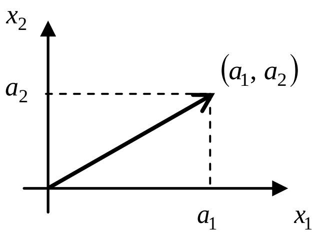


Abbildung 4.1 Grafische Verdeutlichung eines Vektors

Zwei $m \times n$ -Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ sind einander gleich, also $A = B$, wenn für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ auch die Komponenten $a_{ij} = b_{ij}$ gleich sind. Gilt für alle $a_{ij} < b_{ij}$, so ist die Matrix A kleiner B und man schreibt $A < B$. Können die Elemente auch gleich sein, also $a_{ij} \leq b_{ij}$, so ist die Matrix A kleiner oder gleich B und man schreibt $A \leq B$.

Ist die Anzahl der Zeilen und Spalten gleich und damit $m = n$, so ist die Matrix quadratisch und die Elemente a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} bilden die Hauptdiagonale. Die Elemente a_{n1}, ..., a_{1n} bilden die Nebendiagonale. Eine quadratische Matrix, bei welcher alle Elemente auf einer Seite der Hauptdiagonalen gleich Null sind, wird als Dreiecksmatrix bezeichnet. Man unterscheidet dabei eine obere und untere Dreiecksmatrix:

Obere Dreiecksmatrix:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,(n-1)} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix n-ter Ordnung heißt Diagonalmatrix n-ter Ordnung, wenn alle Komponenten außer denjenigen auf der Hauptdiagonalen gleich Null sind:

Diagonalmatrix:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sind dabei die Elemente der Hauptdiagonalen alle gleich 1, so bezeichnet man die Matrix als Einheitsmatrix n-ter Ordnung. Entsprechend wird der Vektor, dessen i-te Komponente 1 ist und sonst nur Komponenten gleich Null enthält, als i-ter Einheitsvektor bezeichnet.

Sind alle Komponenten einer Matrix Null, so heißt die Matrix Nullmatrix und wird mit 0 bezeichnet. Entsprechend wird ein Vektor, dessen Elemente alle Null sind, als Nullvektor bezeichnet.

Vertauscht man bei einer $m \times n$ -Matrix die Zeilen mit den Spalten, so erhält man die zu A transponierte Matrix A^T der Dimension $n \times m$:

Transponierte Matrix:
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Durch Transponieren eines Spaltenvektors erhält man demnach einen Zeilenvektor und umgekehrt. Gilt $A = A^T$, so heißt die quadratische Matrix A symmetrisch. In der Literatur ist für die transponierte Matrix statt der Bezeichnung A^T auch die Schreibweise A' anzutreffen.

Beispiel:

Bestimmen Sie die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ transponierte Matrix A^T .

Die erste Zeile (1 4) wird als erste Spalte geschrieben, die zweite Zeile als zweite Spalte und die dritte Zeile als dritte Spalte:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Matrizenoperationen

Addition und Subtraktion

Sind $A = (a_{ij})$ und zwei -Matrizen, so bezeichnet man die -Matrix als Summe der beiden Matrizen A und B und man schreibt $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij}) = C$.

Entsprechendes gilt für die Subtraktion zweier Matrizen gleicher Ordnung. Man führt demnach die beiden Operationen Addition bzw. Subtraktion mit jedem der Elemente einzeln durch.

Beispiel:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 6-2 & 9-3 \\ 2-(-3) & 4-6 & 6-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix und k ∈ ℝ (also ein Skalar), so berechnet sich das Produkt der reellen Zahl k mit der Matrix A, indem jedes Element aus A mit k multipliziert wird: $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$.

Für die $m \times n$ -Matrizen A, B und C und die reelle Zahl k gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetz	$A + B = B + A$
Assoziativgesetz	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributivgesetz	$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

Tabelle 4.1 Matrizengesetze

Beispiel 7.03 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:

$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Multiplikation von Vektoren (Skalarprodukt)

Ist a^T ein n-dimensionaler Zeilenvektor und b ein n-dimensionaler Spaltenvektor (d.h. a^T und b sind Vektoren gleicher Ordnung), so ist das Produkt der beiden Vektoren definiert als die Summe der Produkte an erster, zweiter, ..., n-ter Stelle:

$$a^T \cdot b = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Das auch als skalares oder inneres Produkt bezeichnete Ergebnis der Vektorenmultiplikation ist nur für Vektoren gleicher Ordnung definiert. Dabei steht der Zeilenvektor immer an erster Stelle, der Spaltenvektor steht an zweiter Stelle.

Für die n-dimensionalen Vektoren a, b und c gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetz	$a^T \cdot b = b^T \cdot a$
Distributivgesetz	$(a^T + b^T) \cdot c = a^T \cdot c + b^T \cdot c$

Tabelle 4.2 Vektorgesetze

Beispiel:

$$(3,\ 7,\ 2,\ 10,\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 3 + 14 + 6 + 40 + 0 = 63$$

Multiplikation von Matrizen

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $n \times p$-Matrix, so bezeichnet man die $m \times p$-Matrix $C = A \cdot B$ als Produkt der beiden Matrizen A und B. Die einzelnen Elemente von $C = (c_{ij})$ berechnen sich dabei aus dem Skalarprodukt der zugehörigen Vektoren aus A und B:

$$c_{ij} = a_i \cdot b_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

D.h. c_{ij} ist das skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors a_i von A mit dem j-ten Spaltenvektor b_j von B. Die Matrizenmultiplikation ist damit nur definiert, falls die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.

Wird eine $m \times n$-Matrix von links mit einem m-dimensionalen Zeilenvektor multipliziert, so ist das Ergebnis ein Zeilenvektor. Wird eine $m \times n$-Matrix von rechts mit einem n-dimensionalen Spaltenvektor multipliziert, so ist das Ergebnis ein Spaltenvektor.

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ (d.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$), doch gelten für die Matrizen A, B und C geeigneter Ordnung die folgenden Gesetze:

Assoziativgesetz	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot B\cdot C$
Distributivgesetz	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

Tabelle 4.3 Matrizenmultiplikation

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+(-1)\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot(-2)+2\cdot(-1)+(-1)\cdot1+1\cdot0 \\ 0\cdot1+1\cdot0+2\cdot1+(-2)\cdot1 & 0\cdot(-2)+1\cdot(-1)+2\cdot1+(-2)\cdot0 \\ 2\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot1+(-3)\cdot1 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)+0\cdot1+(-3)\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Invertierte Matrix

Eine quadratische $n\times n$ -Matrix A heißt invertierbar (oder auch regulär bzw. nicht-singulär), wenn eine $n\times n$ -Matrix A^{-1} existiert, so dass das Produkt der beiden die Einheitsmatrix E ergibt: $A\cdot A^{-1}=E$. Die Matrix A^{-1} wird dabei auch als inverse Matrix (oder kurz Inverse) bezeichnet. Ist eine Matrix nicht invertierbar, so heißt sie singuläre Matrix.

Um von einer gegebenen Matrix A die Inverse zu bestimmen, wird neben die Ursprungsmatrix A die zugehörige Einheitsmatrix E geschrieben. Sodann wird die Matrix A durch Äquivalenzumformungen in die Einheitsmatrix umgeformt. Alle Rechenoperationen, die hierfür notwendig sind, werden zeitgleich mit der Einheitsmatrix E durchgeführt. Die daraus entstandene Matrix ist dann die Inverse zu A:

$$(A\,|\,E) \quad \Rightarrow \quad (E\,|\,A^{-1})$$

Für die Matrizen A und B geeigneter Ordnung und die reelle Zahl k gelten folgende Gesetze:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A \qquad\qquad (A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

$$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T} \qquad\qquad (k\cdot A)^{-1}=\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$$

Beispiel:

Ist $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ die Inverse zu $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Ja, denn $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot3+5\cdot(-1) & 2\cdot(-5)+5\cdot2 \\ 1\cdot3+3\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+3\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Linearkombination

Sind a_1, a_2, ..., a_n Vektoren aus $\mathbb{R}^m$ (also der Dimension m) und k_1, k_2, ..., k_n beliebige reelle Zahlen, dann wird die Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, ..., a_n definiert als:

$$a = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n$$

Diese Linearkombination ist wieder ein Vektor aus $\mathbb{R}^m$.

Sind alle $k_i \geq 0$, so handelt es sich um eine nichtnegative Linearkombination. Gilt zudem $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$, spricht man von einer konvexen Linearkombination.

Beispiel:

1) Für die 3 Vektoren (n = 3) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ aus dem $\mathbb{R}^2$ ist

$$3a_1 + 2a_2 - a_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

die Linearkombination mit $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = -1$.

2) Grafisch lassen sich Linearkombinationen, die man aus zweidimensionalen Vektoren erhält, in einer Ebene darstellen. Wählt man z.B. für die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Linearkombination $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, so erhält man die folgende Grafik:

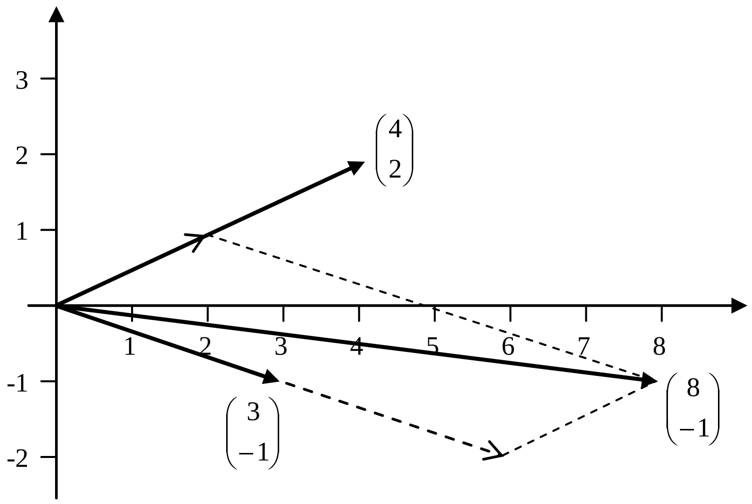


Abbildung 4.2 Linearkombination

Rechnerische Ermittlung:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$$

Lineare Unabhängigkeit

Sind a_1, a_2, ..., a_n m-dimensionale Vektoren aus $\mathbb{R}^m$ und k_1, k_2, ..., k_n beliebige reelle Zahlen, dann heißen die Vektoren linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur durch die triviale Linearkombination dieser Vektoren mit $k_i = 0$ darstellen lässt:

linear unabhängig: $$a = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_i = 0$$

Ist dies nicht der Fall, d.h. der Nullvektor ist als Linearkombination dieser Vektoren darstellbar und nicht alle k_i sind Null, so heißen die Vektoren a_1, a_2, ..., a_n linear abhängig.

Sind die Vektoren a_1, a_2, ..., a_n linear abhängig, so ist zudem jeder Vektor als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar.

Beispiel:

1) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

$$2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1-2+3\cdot0\\2\cdot2-1+3\cdot(-1)\\2\cdot4-(-1)+3\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind linear abhängig, da $k_i \neq 0$: $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$.

2) Lässt sich der Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$ darstellen?

Da die 3 Vektoren linear abhängig sind, lässt sich jeder Vektor als Linearkombination aus den anderen beiden Vektoren darstellen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

Die größte Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) der $m \times n$-Matrix A heißt Rang von A und wird mit $rang(A)$ (oder auch $r(A)$ oder $rg(A)$) bezeichnet.

Zur Bestimmung des Ranges werden in den Spalten der Matrix durch Äquivalenzumformungen Einheitsvektoren erzeugt (in beliebiger Reihenfolge). Die maximale Anzahl der so erzeugten Einheitsvektoren entspricht dann dem Rang der Matrix.

Anwendung findet der Rang vor allem als Kriterium zur Bestimmung der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Der Rang der Matrix ist rang(A) = 2, denn die dritte Spalte ist das Dreifache der ersten Spalte und damit sind die beiden Vektoren an erster und dritter Stelle linear abhängig, d.h. die größte Anzahl linear unabhängiger Vektoren ist 2.

4.3 Determinanten

Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix A ist eine reelle Zahl, die aus den Elementen einer quadratischen Matrix nach bestimmten Regeln berechnet wird. Die Schreibweise für die Determinante lautet det(A) oder auch |A|. (Achtung, hier besteht Verwechslungsgefahr mit den Strichen des Absolutbetrages).

Für $n = 1$ ist die Determinante definiert als die Differenz von Hauptdiagonale und Nebendiagonale:

1×1 -Matrix: $\det(A) = |a| = a$

Für $n = 2$ ist die Determinante definiert als:

2×2 -Matrix: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Für $n = 3$ ist die Determinante definiert als:

3×3-Matrix:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Diese komplizierte Formel lässt sich mit Hilfe der so genannten Regel von Sarrus leicht merken:

Regel von Sarrus

Zur Bestimmung der Determinante einer 3×3-Matrix schreibt man den ersten und den zweiten Spaltenvektor noch einmal hinter die ursprüngliche Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Sodann erhält man die positiven Summanden der Determinante aus den Hauptdiagonalen und ihren Parallelen (dargestellt als durchgehende Striche), die negativen Summanden ergeben sich aus den Nebendiagonalen und ihren Parallelen (dargestellt als gestrichelte Linien):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Allgemein (und insbesondere für Determinanten von Matrizen mit $n \geq 4$) erfolgt die Berechnung anhand von Teilmatrizen, wobei D_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Teilmatrix von A bezeichnet, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Die Determinante dieser Teilmatrix, also det(D_{ij}), ist demnach eine (n-1)-reihige Unterdeterminante von A. Zur Berechnung der Determinanten von A werden die Elemente a_{ij} mit dem entsprechenden Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ versehen und mit der jeweiligen Unterdeterminante multipliziert. Diese Entwicklung wird auch als Entwicklungssatz von Laplace bezeichnet.

Den durch den Faktor $(-1)^{i+j}$ bewirkten Vorzeichenwechsel kann man sich als eine Art Schachbrettmuster in der Matrix vorstellen:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Bei einer 3×3-Matrix A ergibt sich demnach z.B. für die Entwicklung nach der 1. Zeile folgendes Ergebnis für die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Die Entwicklung nach einer anderen Zeile oder nach einer Spalte führt zum selben Ergebnis.

Anwendung finden Determinanten vor allem bei der Bestimmung des Ranges einer Matrix, bei der Berechnung der Inversen einer Matrix und bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Eigenschaften

Die Determinante besitzt folgende Eigenschaften:

1) Die Determinante der Einheitsmatrix ist 1: $\det(E) = 1$.

2) Die Determinanten einer Matrix und einer transponierten Matrix sind identisch: $\det(A) = \det(A^T)$.

3) Für eine reelle Zahl k und eine Matrix A $\in \mathbb{R}^n$ gilt: $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$.

4) Für die Matrizen A und B, beide aus $\mathbb{R}^n$, gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

5) Für die Matrizen A und B, beide aus $\mathbb{R}^n$, gilt: $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

6) Sind zwei Zeilen oder Spalten einer Matrix A identisch, so ist die Determinante 0: $\det(A) = 0$.

7) Enthält eine Zeile oder eine Spalte einer Matrix A nur Nullen, so ist die Determinante 0: $\det(A) = 0$.

8) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ergibt sich als Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a) nach der Regel von Sarrus und b) mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes.

a) Anwendung der Regel von Sarrus ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 6 - 4 = 3$$

Also det(A)=3

b) Anwendung Entwicklungssatz nach Laplace für die 1. Zeile ergibt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) + 0 = 1 - 4 + 6 = 3$$

Also det(A)=3

4.4 Lineare Gleichungssysteme

Ist A eine $m \times n$ -Matrix und b ein m-dimensionaler Vektor, so wird die Gleichung $A \cdot x = b$ als lineares Gleichungssystem (LGS) mit n Variablen x_1, x_2, ..., x_n und m Gleichungen bezeichnet:

Lineares Gleichungssystem:

in Normalform: $A \cdot x = b$

in ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{gathered} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{gathered}$$

in Vektorenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ist bei einem linearen Gleichungssystem $A \cdot x = b$ der Vektor $b = 0$, so wird das Gleichungssystem als homogen bezeichnet. Ist mindestens ein Element des Vektors b nicht Null (also $b_i \neq 0$ für ein i), so spricht man von einem inhomogenen Gleichungssystem.

Lösbarkeit

Ist $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem mit der $m \times n$ -Matrix A und dem m-dimensionalen Vektor b, also mit m Gleichungen in n Variablen, und ist $rang(A|b)$ der Rang der Matrix (A, b) – d.h. die Matrix A wurde um die rechte Seite b erweitert –, so gilt für die Lösbarkeit des Gleichungssystems:

Ist $rang(A) < rang(A|b)$, so ist $A \cdot x = b$ nicht lösbar.

Ist $rang(A) = rang(A|b) = r$ und $r < n$, so existieren unendlich viele Lösungen.

Ist $rang(A) = rang(A|b) = r$ und $r = n$, so besitz $A \cdot x = b$ genau eine (eindeutige) Lösung.

Die eindeutige Lösbarkeit setzt voraus, dass die Anzahl der Gleichungen nicht kleiner ist als die Anzahl der Variablen, d.h. es existieren mindestens so viele Gleichungen wie Variablen (also $m \geq n$).

Beispiel:

Ist das Gleichungssystem $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$ lösbar?

$A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$rang(A) = 3$, da alle 3 Vektoren linear unabhängig sind.

$rang(A \mid b) = 3$, denn b entspricht dem ersten Spaltenvektor.

Also gilt: $rang(A) = rang(A \mid b) = r = 3$

Da $n = 3$ gilt $r = 3 = n$ und damit hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

4.5 Gauß'sches Eliminationsverfahren

Eines der bekanntesten Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist das Eliminationsverfahren von Gauß, auch Gauß'scher Algorithmus genannt. Dabei wird die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ durch entsprechende Zeilenoperationen (Äquivalenzumformungen, Rechenoperationen und Vertauschen) in eine obere Dreiecksmatrix umgewandelt. Sodann lassen sich durch sukzessives Einsetzen der bereits berechneten Lösungswerte die noch fehlenden Lösungen bestimmen (d.h. anhand des Wertes für x_n lässt sich der Wert x_{n-1} berechnen, sodann der Wert x_{n-2} usw.).

Folgende Rechenoperationen können in einem linearen Gleichungssystem durchgeführt werden, ohne die Lösungsmenge zu verändern:

1) Äquivalente Umformungen von einzelnen Gleichungen.
2) Addition von Gleichungen.
3) Vertauschen von zwei Gleichungen.

Durch geschickte Kombination dieser Grundregeln ist ein systematisches Auflösen linearer Gleichungssysteme möglich.

Die drei Schritte des Gauß'schen Eliminationsverfahrens sind im folgenden Algorithmus für das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der $m \times n$-Matrix A, dem m-dimensionalen Vektor b und $m \geq n$ allgemein dargestellt:

1) Erweiterung der Matrix A um den Vektor b:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

2) Umwandlung von $(A \mid b)$ in eine obere (quadratische) Dreiecksmatrix mit Hilfe der oben dargestellten Grundregeln:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\ 0 & 0 & a_{33}^* & \dots & a_{3n}^* & b_3^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^* & b_n^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3) Bestimmung der Lösungen von x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1:

Die Dreiecksmatrix aus 2) lässt sich auch als Gleichungssystem schreiben:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 + \dots + a_{2n}^*x_n &= b_2^* \\ a_{33}^*x_3 + \dots + a_{3n}^*x_n &= b_3^* \\ \dots \\ a_{nn}^*x_n &= b_n^* \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich von unten nach oben die einzelnen Werte für x_i nacheinander berechnen, denn aus $a_{nn}^*x_n = b_n^*$ lässt sich mit Hilfe von Äquivalenzumformungen x_n berechnen zu $x_n = \frac{b_n^*}{a_{nn}^*}$. Dieser Wert kann nun in die darüber stehende Gleichung eingesetzt werden und daraus der Wert für x_{n-1} berechnet werden und so weiter.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Erweiterung der Matrix A um den Vektor b:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 3 & 1 & 4 & 25 \\ 2 & 5 & 2 & 50 \end{array}\right)$$

Umwandlung in eine obere Dreiecksmatrix:

Die neue 3. Zeile ergibt sich, indem man von ihr das Zweifache der 1. Zeile abzieht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 3 & 1 & 4 & 25 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Subtraktion des Dreifachen der 1. Zeile von der 2. Zeile ergibt die neue 2. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 0 & -5 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Multiplikation der 3. Zeile mit 5 und anschließende Addition mit Zeile 2 ergibt für Zeile 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 25 \\ 0 & -5 & -5 & -50 \\ 0 & 0 & -25 & -50 \end{array}\right)$$

Bestimmung der Lösung:

Auflösen der 3. Gleichung nach x_3 ergibt:

$$-25x_3 = -50 \Leftrightarrow x_3 = \frac{-50}{-25} = 2$$

Einsetzen in die 2. Gleichung und Auflösen nach x_2 ergibt:

$$-5x_2 - 5x_3 = -50 \Leftrightarrow -5x_2 - 5 \cdot 2 = -50 \Leftrightarrow -5x_2 = -40 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-40}{-5} = 8$$

Einsetzen von x_3 und x_2 in die 1. Gleichung und Auflösen nach x_1 ergibt:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25 \Leftrightarrow x_1 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

Die Lösung lautet $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.6 Cramer’sche Regel

Hat das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der $m \times n$ -Matrix A und dem m-dimensionalen Vektor b eine eindeutige Lösung x, so lässt sich diese mit der Cramer’schen Regel berechnen und es gilt für die einzelnen Werte x_i und die Spaltenvektoren a_i für $i = 1, \ldots, n$:

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)}$$

D.h. zur Berechnung der Lösung x_i wird in der Matrix A die i-te Spalte durch den Vektor b ersetzt, die Determinante berechnet und durch die eigentliche Determinante det(A) geteilt.

Da man zur Bestimmung der Lösung mit Hilfe der Cramer’schen Regel allerdings $n+1$ Determinanten berechnen muss, ist diese Regel für große n nicht praktisch (jedoch für theoretische Untersuchungen wertvoll).

Beispiel:

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 50 \end{pmatrix}$

mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot 2 = 25$$

$$x_1 = \frac{1}{25}\cdot\begin{vmatrix} 25 & 2 & 3 \\ 25 & 1 & 4 \\ 50 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\cdot\left(25\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 50 + 3\cdot 25\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot 50 - 25\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 25\cdot 2\right) = \frac{1}{25}\cdot 75 = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{25}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 25 & 3 \\ 3 & 25 & 4 \\ 2 & 50 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\cdot\left(1\cdot 25\cdot 2 + 25\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 50 - 3\cdot 25\cdot 2 - 1\cdot 4\cdot 50 - 25\cdot 3\cdot 2\right) = \frac{1}{25}\cdot 200 = 8$$

$$x_3 = \frac{1}{25}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 25 \\ 3 & 1 & 25 \\ 2 & 5 & 50 \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\cdot\left(1\cdot 1\cdot 50 + 2\cdot 25\cdot 2 + 25\cdot 3\cdot 5 - 25\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 25\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot 50\right) = \frac{1}{25}\cdot 50 = 2$$

Die Lösung lautet $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5 Analysis

Zusammenfassung

- von Kapitel 5 -

Wichtige Teilgebiete der Grundzüge der Analysis sind:

- die mathematische Definition von Funktion und Umkehrfunktion,
- Folgen und Reihen,
- Grenzwerte von Funktionen,
- Differentialrechnung,
- Extremstellen,
- Wendepunkte,
- Kurvendiskussion,
- Integralrechnung sowie deren Anwendung im
- wirtschaftswissenschatlichen Kontext.

Lernziele

Der Studierende soll

- mit Funktionen, Folgen und Reihen umgehen können,
- reelle Funktionen mit Hilfe der gängigen Ableitungsregeln und Grenzwertberechnungen auf ihre Eigenschaften hin untersuchen und eine
- detaillierte Kurvendiskussion durchführen können. Er soll die
- Integralrechnung anwenden können und die
- geometrische Interpretation des bestimmten Integrals verstanden haben.
- Zudem soll er diese Teile der Analysis im wirtschaftswissenschaftlichen Kontext anwenden können.

Literaturhinweise

Fischer, Gerd (2013): Lineare Algebra, Braunschweig.

Kemnitz, Arnfried (2013): Mathematik zum Studienbeginn, Braunschweig.

Opitz, Otto (2011): Mathematik, München.

Schwarze, Jochen (2010): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 1-3, Berlin.

Tietze, Jürgen (2013): Einführung in die Finanzmathematik, Wiesbaden.

Wewel, Max C. (2010): Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL, Hallbergmoos.

5.1 Funktionen

Eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element x aus der einen Menge eindeutig ein Element y aus der anderen Menge zuordnet, heißt Funktion f und man schreibt:

Funktion: $f(x) = y$

Die Menge der Werte, die für die Variable x zugelassen sind, wird als Definitionsbereich bezeichnet. Die Menge der Werte, die die Variable y annehmen kann, heißt Wertebereich.

Löst man die Funktion $f(x) = y$ nach der Variablen x auf, so erhält man die Umkehrfunktion (oder auch Inverse) und schreibt:

Umkehrfunktion: $f^{-1}(y) = x$

Beispiel:
Wie lautet die Umkehrfunktion von $f(x) = \ln x$?
x nach x auflösen ergibt y
Und damit ist die e-Funktion die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus.

Nullstellen
Die Stellen einer Funktion, die die x-Achse schneiden, werden als Nullstellen bezeichnet. Man erhält die Nullstellen einer Funktion, indem man die Funktionsgleichung gleich Null setzt (also $f(x) = y = 0$) und nach x auflöst.

Nullstellen: $f(x) = 0$

Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n reelle Nullstellen. Ist zudem n ungerade, so besitzt das Polynom mindestens eine reelle Nullstelle.

Bilden die Funktionswerte einer Funktion f eine nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge, so heißt f nach oben (bzw. unten) beschränkt. Ist die Bildmenge sowohl nach oben als auch unten beschränkt, so heißt die Funktion beschränkt.

Eine weitere Eigenschaft von Funktionen ist die Monotonie. Eine Funktion heißt monoton wachsend (bzw. fallend), wenn für beliebige x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich mit $x_1 < x_2$ (bzw. $x_1 > x_2$) auch die zugehörigen Funktionswerte dieser Vorschrift genügen.

Monotonie

monoton wachsend: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

streng monoton wachsend: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

monoton fallend: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$

streng monoton fallend: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

Zudem können Funktionen große Unterschiede bezüglich ihrer Krümmung aufweisen. Liegen in einem Intervall alle Verbindungslinien zwischen zwei Funktionswerten oberhalb des Funktionsgraphen, so bezeichnet man die Kurve als konvex. Diese Art der Krümmung wird auch Linkskurve genannt. Eine konkave Kurve (oder auch Rechtskurve) liegt vor, wenn die Strecken unterhalb der Funktion liegen. Diese Definition lässt sich am besten anhand der folgenden Grafik veranschaulichen:

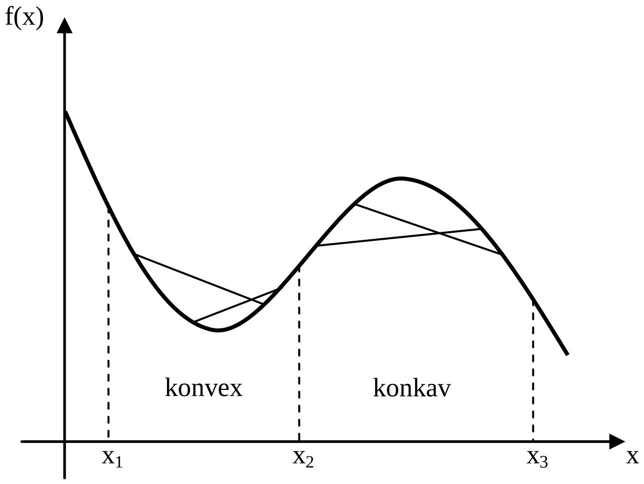


Abbildung 5.1 Krümmung einer Funktion

Symmetrie

Weitere wichtige Eigenschaften zur Charakterisierung von Funktionen betreffen die Symmetrie. Hierbei lassen sich zwei Arten unterscheiden: die Spiegelsymmetrie und die Punktsymmetrie.

Eine Funktion heißt spiegelsymmetrisch zu einer Geraden x_0, wenn alle Werte, die denselben Abstand von x_0 haben, auch denselben Funktionswert besitzen, d.h. wenn gilt:

Spiegelsymmetrie:

$f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ zur Geraden x_0

$f(x) = f(-x)$ zur y-Achse

Anschaulich formuliert bedeutet dies, die Funktion lässt sich an der Geraden x_0 spiegeln:

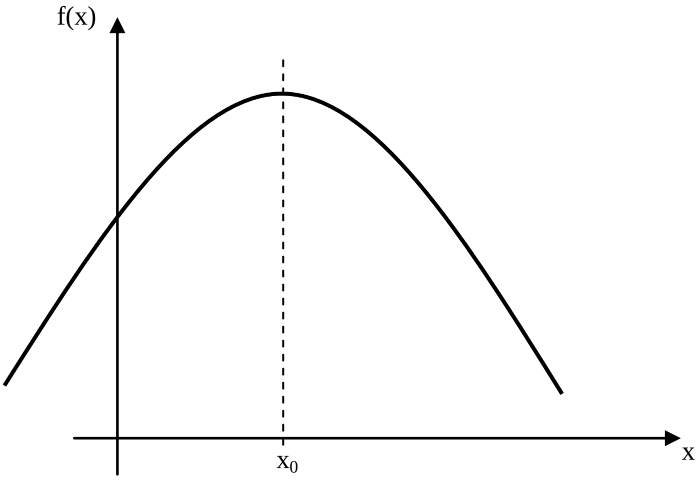


Abbildung 5.2 Symmetrie einer Funktion

Eine Funktion heißt punktsymmetrisch zu einem Punkt (x_0; f(x_0)), wenn sie sich an einem Punkt spiegeln lässt, d.h. wenn gilt:

Punktsymmetrie: $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2 \cdot f(x_0)$ zum Punkt (x_0; f(x_0))

$f(x) = -f(-x)$ zum Ursprung

Die folgende Grafik zeigt beispielsweise eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion:

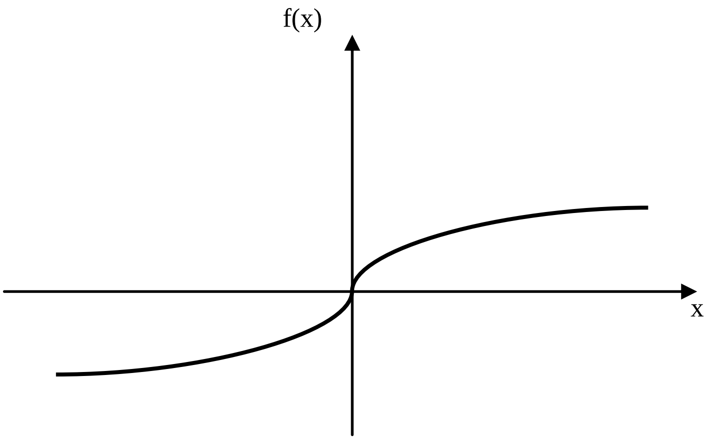


Abbildung 5.3 Punktsymmetrie einer Funktion

Beispiel:

Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ für $x \geq 0$ und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

Was lässt sich über die Monotonie von f aussagen?

Gegeben: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

Gesucht: $f(x)=0$, $f^{-1}(y)=x$, Monotonie

Nullstellen $f(x)=0$:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2=-4 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

Da $x \geq 0$ lautet die Nullstelle $N_1(\sqrt{8};0)$.

Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=x$:

$$f(x)=y=-\frac{1}{2}x^2+4 \Leftrightarrow y-4=-\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -2y+8=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-2y+8}$$

Da $x \geq 0$ lautet die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=+\sqrt{-2y+8}$.

Monotonie:

Zu untersuchen: Welche Beziehung gilt für $f(x_1)$ und $f(x_2)$, wenn $x_1 < x_2$ ist?

Gilt $x_1 < x_2$, so gilt auch $x_1^2 < x_2^2$, denn $x \geq 0$.

Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ ergibt:

$-\frac{1}{2}x_1^2 > -\frac{1}{2}x_2^2$ (Ungleichheitszeichen dreht sich um!)

Addition von $+4$ ergibt:

$$-\frac{1}{2}x_1^2+4 > -\frac{1}{2}x_2^2+4 \Leftrightarrow f(x_1)=-\frac{1}{2}x_1^2+4 > -\frac{1}{2}x_2^2+4=f(x_2)$$

Also gilt $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$ und damit ist f streng monoton fallend.

5.2 Folgen und Reihen

Folgen

Wird jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so entsteht eine unendliche Zahlenfolge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ und man schreibt dafür (a_n). Die Zahl a_i heißt dabei das i-te Glied der Folge (a_n). Eine Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ heißt endliche Folge.

Folge: (a_n) für n $\in \mathbb{N}$

Eine Zahlenfolge (a_n) mit $a_{n+1}=a_n+d$ (d $\in \mathbb{R}$) heißt arithmetische Folge:

Arithmetische Folge: (a_n) mit $a_{n+1}=a_n+d$ und d $\in \mathbb{R}$

Durch Umformen erhält man $a_{n+1}=a_n+d=a_1+n\cdot d$ und man erkennt, dass die einfache Zinsrechnung eine Anwendung der arithmetischen Folge darstellt.

Eine Zahlenfolge (a_n) mit $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (q ∈ ℝ\{0}) heißt geometrische Folge:

Geometrische Folge: (a_n) mit $a_{n+1} = a_n \cdot q$ und q ∈ ℝ\{0}

Durch Umformen erhält man $a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n$ und man erkennt, dass die Zinseszinsrechnung eine Anwendung der geometrischen Folge ist.

Reihen

Die Zahlenfolge (a_n) sei gegeben. Die unendliche Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ der Folgenglieder nennt man unendliche Reihe und man schreibt dafür $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Häufig wird der erste Summand mit a_0 bezeichnet, so dass die Reihe dann über i = 0, 1, ..., ∞ (statt i = 1, ..., ∞) läuft.

Reihe: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Die Summe einer arithmetischen Folge wird als arithmetische Reihe bezeichnet und es gilt:

Arithmetische Reihe: $\sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot \left(a_1 + \frac{n-1}{2} \cdot d \right)$

Die Summe einer geometrischen Folge wird als geometrische Reihe bezeichnet und es gilt:

Geometrische Reihe: $\sum_{i=1}^{n} q_i = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

In der Rentenrechnung finden sowohl die arithmetische als auch die geometrische Reihe Anwendung.

Beispiel:

Berechnen Sie die Summe aller ungeraden Zahlen bis einschließlich 15.

Gegeben: $a_1 = 1$, n = 8, d = 2

Gesucht: $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Einsetzen in die Formel für die arithmetische Reihe ergibt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{8} a_i = 8 \cdot \left(1 + \frac{8-1}{2} \cdot 2 \right) = 64$$

Oder zu Fuß: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{8} a_i = 1+3+5+7+9+11+13+15 = 64$

5.3 Grenzwerte von Funktionen

Bei der Grenzwertbetrachtung werden prinzipiell zwei Fragestellungen unterschieden:
1) Wie verhalten sich die Funktionswerte für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$), d.h. wie sieht der Wertebereich der Funktion für sehr große (bzw. sehr kleine) Werte von x aus?
2) Wie verhalten sich die Funktionswerte, wenn x gegen eine Stelle x_0 strebt ($x \to x_0$)?
Bei beiden Varianten interessiert dabei, ob sich die Funktionswerte an dieser Stelle (∞, –∞, oder x_0) einem bestimmten Wert annähern. Dieser Wert wird als Grenzwert bezeichnet und man sagt, die Funktion konvergiert gegen diesen Wert. Die mathematische Schreibweise des Grenzwertes (= Limes) lautet hierbei:

Grenzwert: $\lim_{x \to \infty} f(x) = w$ bzw. $\lim_{x \to x_0} f(x) = w$

Und man sagt „der Limes von f von x für x gegen unendlich ist w“ bzw. „der Limes von f von x für x gegen x_0 ist w“.

Häufig existieren jedoch 2 unterschiedliche Grenzwerte für $x \to x_0$, je nach dem ob man sich dem Wert x_0 von links oder von rechts nähert. Diese Grenzwerte werden dann als linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte bezeichnet und man schreibt $x \to {x_0}^-$ bzw. $x \to {x_0}^+$. Sind diese beiden Grenzwerte identisch, so besitzt die Funktion einen eindeutigen Grenzwert.

Eine Funktion f(x) heißt (lokal) stetig an der Stelle x_0, wenn der eindeutige Grenzwert an der Stelle x_0 existiert. Andernfalls ist f(x) an der Stelle x_0 unstetig.

Stetigkeit: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ist die Funktion f(x) an jeder Stelle stetig, so ist die Funktion f(x) auch (global) stetig. Das bedeutet, eine Funktion ist stetig, wenn ihr Kurvenverlauf durchgängig ohne Lücken, Sprung- oder Polstellen ist. Eine Polstelle bezeichnet dabei eine Stelle, die aufgrund einer Definitionslücke im Definitionsbereich nicht existiert.

Existieren die Grenzwerte für die Funktionen f(x) und g(x) und gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = u$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = v$, so gelten folgende Rechenregeln für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division:

Addition: $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=u+v$$

Subtraktion: $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)=u-v$$

Multiplikation: $$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=u\cdot v$$

Division: $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{u}{v} \qquad \text{falls } v\neq 0$$

Nähert sich eine Funktion immer mehr einer Geraden, ohne diese jedoch zu erreichen, so heißt diese Gerade Asymptote.

Beispiel:

1) Berechnen Sie die Grenzwerte für folgende Ausdrücke:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x}{4x^2-5x+9}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x}{4x^2-5x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(3-7\cdot\frac{1}{x}\right)}{x^2\cdot\left(4-5\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}.\frac{3-7\cdot\frac{1}{x}}{4-5\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1.\frac{3-7\cdot\frac{1}{x}}{4-5\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}}\right)$$

Da $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ gilt weiter:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-7\cdot\frac{1}{x}}{4-5\cdot\frac{1}{x}+9\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{3-7\cdot 0}{4-5\cdot 0+9\cdot 0}=\frac{3}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2+1}$

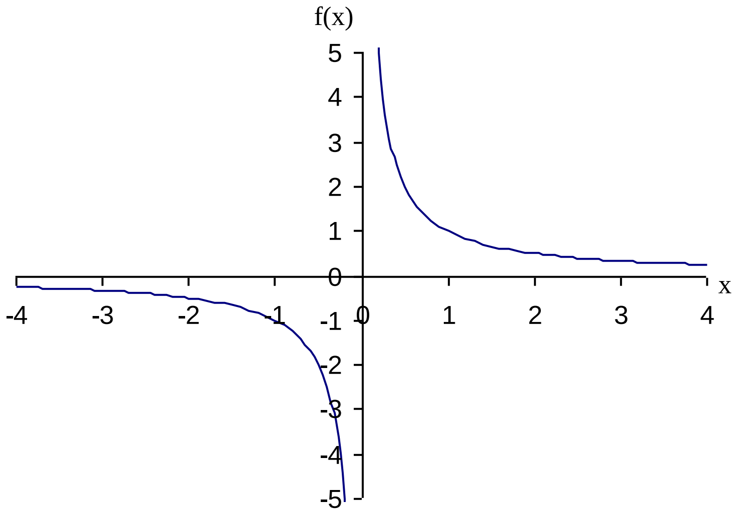
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1$$

2) Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion $\dfrac{1}{x}$ und untersuchen Sie sie auf Grenzwerte und Stetigkeit.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$, Definitionsbereich: x $\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Wertetabelle:

X	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3
f(x)	-0,33	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	0,33



Die Grenzwerte für $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$ und $x \to \infty$ lassen sich entweder aus dem Schaubild ablesen oder berechnen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ und } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist an der Stelle x = 0 nicht definiert, besitzt also eine Polstelle bei x = 0 und ist damit nicht stetig. An den Stellen $x \neq 0$ ist f(x) lokal stetig.

Wie aus dem Schaubild ersichtlich ist, sind die beiden Achsen, also f(x) = 0 und x = 0, Asymptoten der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$.

[Als (unmatematische) Faustregel kann man sich merken, dass eine stetige Funktion mit einem Stift durchgängig ohne Abzusetzen (also ohne Lücken) in ein Achsenkreuz einzeichenbar ist. Wenn dies nicht möglich ist, handelt es sich um eine unstetige Funktion.]

5.4 Differentialrechnung

Die Funktion f(x) heißt an der Stelle x_0 differenzierbar (= ableitbar), wenn folgender Grenzwert existiert:

Ableitung: $$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Statt Ableitung wird häufig auch der äquivalente Begriff des Differentialquotienten verwendet. Betrachtet man lediglich den Quotienten ohne den Grenzwert, so spricht man vom Differenzenquotienten:

Differenzenquotient: $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Die Ableitung von f(x) entspricht der Steigung der Funktion an der Stelle x_0. Dieser Sachverhalt lässt sich geometrisch verdeutlichen, wenn man das folgende Schaubild näher betrachtet:

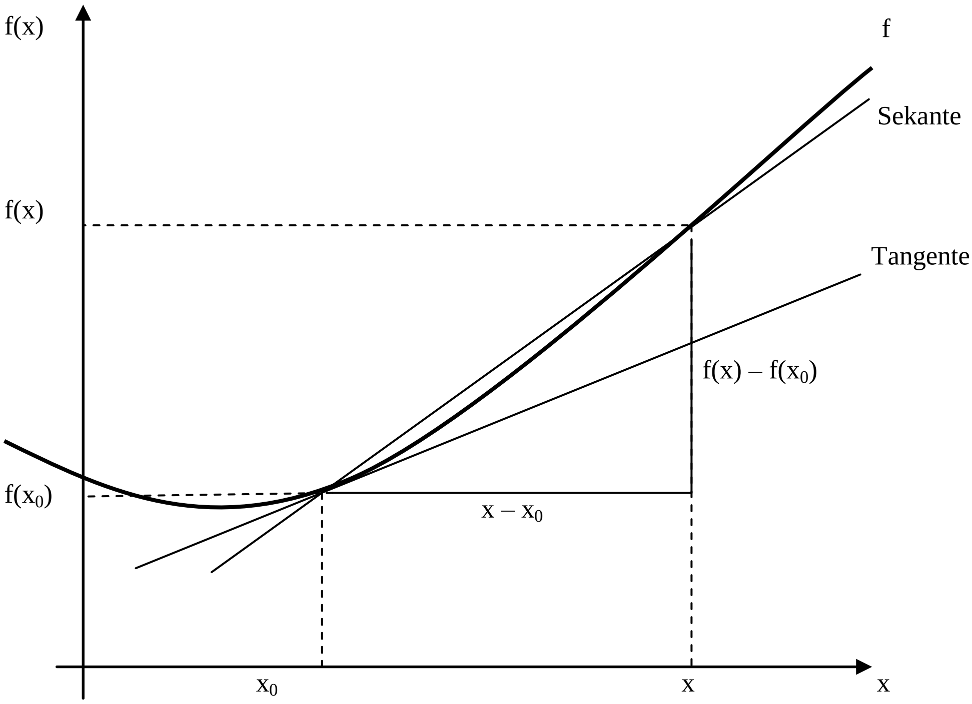


Abbildung 5.4Ableitung einer Funktion

Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ entspricht der Steigung der Sekante und der Differentialquotient $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (und damit die Ableitung) an der Stelle x_0 entspricht der Steigung der Tangente durch den Punkt (x_0; f(x_0)).

Nähert sich also x dem Wert x_0 an, so nähert sich auch die Sekantensteigung der Tangentensteigung im Punkt x_0 an und damit der Ableitung an der Stelle x_0. Für den rechnerischen Beweis wird an dieser Stelle auf weiterführende Literatur verwiesen.

Existiert der Differentialquotient für alle x_0 aus dem Definitionsbereich, so heißt die Funktion (global) differenzierbar. Die Funktion $f': x \mapsto f'(x)$ wird als 1. Ableitung von f bezeichnet und man schreibt $f'(x)$ oder auch $\frac{df(x)}{dx}$.

Ist die erste Ableitung wiederum differenzierbar, so nennt man die Ableitung der ersten Ableitung (also $(f'(x))'$) die zweite Ableitung und schreibt $f''(x)$. Ist eine Funktion f(x) $(n-1)$ -mal differenzierbar, so heißt $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung.

Ableitungsregeln

Die Funktionen $f : x \mapsto f(x)$ und $g : x \mapsto g(x)$ seien auf einer gemeinsamen Definitionsmenge differenzierbar, c = const., dann gelten folgende Ableitungsregeln:

Summenregel:	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Faktorregel:	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$
Produktregel:	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel:	$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Kettenregel:	$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

Beispiel:

Leiten Sie die folgenden Funktionen einmal ab:

a) $h($

Summenregel: h'

b) $h($

Faktorregel: h'

c) $g($

Produktregel: $f = (5x^3 - 3)$ und g

d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$

Mit Hilfe der 3. binomischen Formel ergibt sich:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

Quotientenregel $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ mit $u = 1$ und $v = x - 3$ ergibt $u' = 0$ und $v' = 1$, also:

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{0 \cdot (x-3) - 1 \cdot 1}{(x-3)^2} = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

e) $f(x) = (5x^2 + 7)^2$

Kettenregel $(u \circ v)' = u'(v) \cdot v'$ anwenden auf $u(v) = v^2$ und $v(x) = 5x^2 + 7$:

$u'(v) = 2v$

$v'(x) = 10x$

$f'(x) = (u \circ v)' = u'(v) \cdot v' = 2v \cdot 10x = 2 \cdot (5x^2 + 7) \cdot 10x = 100x^3 + 140x$

[unmathematische Erklärung der Kettenregel: **äußere Ableitung multipliziert mit innerer Ableitung**.
In diesem Beispiel „außen = $(\ldots)^2$" und „innen = $5x^2+7$" und damit:

äußere Ableitung = $2 \cdot (5x^2 + 7)$ Ableitung von $(\ldots)^2$

innere Ableitung = $10x$ Ableitung von $5x^2+7$

und damit: =]

Ableitungen für spezielle Funktionen lassen sich jeder Formelsammlung entnehmen, die wichtigsten werden (für c = const., $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und a beliebig) in der folgenden Tabelle (ohne Beweis) dargestellt:

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$c \cdot x^r$	$c \cdot r \cdot x^{r-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
x^x	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

Tabelle 5.1 Ableitungsregeln

Regel von de l'Hospital

Sind die Funktionen f und g differenzierbar, gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ und $g'(x) \neq 0$, dann gilt:

de l'Hospital: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert

Beispiel:

1) Berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2$

$f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} + 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 2 \cdot x^{2-1} = 4x^3 + 6x^2 - 2x$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 3x^3 - 5x$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 3x^3 - 5x$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} + 3 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 5 = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 9x^2 - 5 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{-1} + 9x^2 - 5 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9x^2 - 5$$

2) Berechnen Sie die 3. Ableitung zur Funktion $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 7$.

$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 - 8x$

$f''(x) = 20x^3 + 18x - 8$

$f'''(x) = 60x^2 + 18$

3) Berechnen Sie den Grenzwert der Funktion $\lim\limits_{x \to 4} \frac{3x^2 - 16x + 16}{3x^2 - 18x + 24}$.

$f(x) = 3x^2 - 16x + 16$

$g(x) = 3x^2 - 18x + 24$

Bedingungen für l'Hospital:

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4}(3x^2 - 16x + 16) = 48 - 64 + 16 = 0$ und

$\lim\limits_{x \to 4} g(x) = \lim\limits_{x \to 4}(3x^2 - 18x + 24) = 48 - 72 + 24 = 0$,

$f'(x) = 6x - 16$ und $g'(x) = 6x - 18$ existieren und $g'(x) \neq 0$, also gilt:

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 16x + 16}{3x^2 - 18x + 24} = \lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 4} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 4} \frac{6x - 16}{6x - 18} = \frac{24 - 16}{24 - 18} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

5.5 Extremwerte

Als Extremwerte bzw. Extrema werden alle Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion bezeichnet. Hierbei kann es sich sowohl um lokale Extrema als auch um globale Extrema handeln. Ein lokales (oder auch relatives) Extremum liegt dann vor, wenn die so genannte Extremalbedingung für ein Intervall des Definitionsbereiches gilt. Gilt die Bedingung für alle Werte aus dem Definitionsbereich, so handelt es sich um ein globales (oder auch absolutes) Extremum. Statt Hochpunkt findet man auch häufig die Bezeichnung Maximum und statt Tiefpunkt die Bezeichnung Minimum.

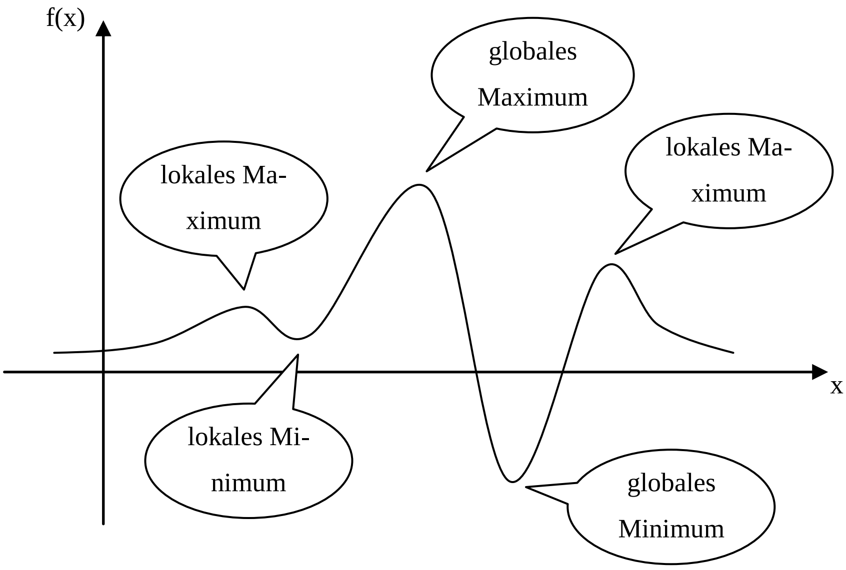


Abbildung 5.5 Extremwerte einer Funktion

Gilt $f(x_0) \geq f(x)$, so besitzt die Funktion f(x) an der Stelle x_0 ein Maximum. Gilt diese Bedingung für alle x aus dem Definitionsbereich, so handelt es sich um einen absoluten Hochpunkt, gilt die Bedingung nur für eine Teilmenge des Definitionsbereiches, so liegt ein relativer Hochpunkt vor.

Da die Tangente in diesem Hochpunkt (x_0; $f(x_0)$) eine zur x-Achse parallele Gerade darstellt, ist ihre Steigung 0. Das bedeutet, dass die 1. Ableitung von f(x) an der Stelle x_0 jedoch auch den Wert 0 annehmen muss, weshalb als Kriterium für die Existenz eines Hochpunktes gilt:

Maximum (Hochpunkt): $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

Gilt $f(x_0) \leq f(x)$, so besitzt die Funktion f(x) an der Stelle x_0 ein Minimum. Gilt diese Bedingung für alle x aus dem Definitionsbereich, so liegt ein absoluter Tiefpunkt vor. Gilt die Bedingung lediglich für eine Teilmenge des Definitionsbereiches, so handelt es sich um ein relatives Minimum.

Als Kriterium für die Existenz eines Tiefpunktes gilt:

Minimum (Tiefpunkt): $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Steigung

Das Steigungsverhalten einer Funktion lässt sich auch mit Hilfe der Differentiation bestimmen. Dabei lässt sich die Art der Monotonie an der 1. Ableitung der Funktion $f'(x)$ für die einzelnen Werte ablesen:

streng monoton steigend: $f'(x_0) > 0$

streng monoton fallend: $f'(x_0) < 0$

Ist dabei $f'(x_0) = 0$, so befindet sich an dieser Stelle der Kurve ein Extremum.

Hat eine auf dem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige und differenzierbare Funktion f an den Stellen a und b denselben Funktionswert (also gilt $f(a) = f(b)$), so gibt es mindestens eine lokale Extremstelle im Inneren des Intervalls [a, b]:

Satz von Rolle: $f(a) = f(b) \Rightarrow$ mind. eine Extremstelle existiert in [a, b]

Der Beweis lässt sich geometrisch veranschaulichen, insbesondere wenn man sich verdeutlicht, dass an 2 Stellen a und b nur dann die Funktionswerte f(a) und f(b) übereinstimmen können, wenn sich innerhalb dieses Intervalls [a, b] die Kurve „umdreht“:

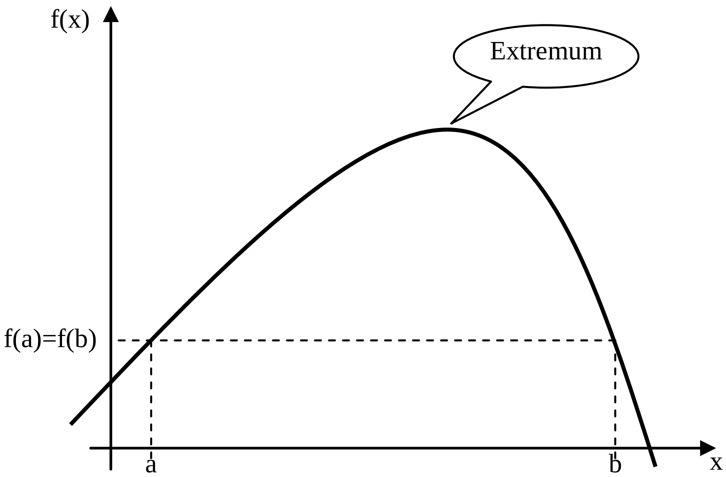


Abbildung 5.6 Satz von Rolle

Beispiel:

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ auf Extrempunkte.

Gegeben: f(x)

Gesucht: Extrema

Ableiten der Funktion ergibt:

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

Gleichsetzen der 1. Ableitung mit Null als Kriterium für ein Extremum:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0$

Per Mitternachtsformel nach x auflösen ergibt:

$$x_{1/2} = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4*6*12}}{2*6} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{12} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{12} = \frac{18 \pm 6}{12}$$

$x_1 = \frac{18+6}{12} = \frac{24}{12} = 2$ und $x_2 = \frac{18-6}{12} = \frac{12}{12} = 1$

Überprüfung des Kriteriums $f''(x)$:

$f''(x) = 12x - 18$

Einsetzen von x_1 resp. x_2 liefert:

$f''(x_1) = f(2) = 12 \cdot 2 - 18 = 6 \quad > 0$ also Minimum bei $x_1 = 2$,

$f''(x_2) = f(1) = 12 \cdot 1 - 18 = -6 \quad < 0$ also Maximum bei $x_2 = 1$.

Also hat die Funktion folgende Extrema:

$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 2 = 3$

Hochpunkt bei H(1; 3).

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 2 = 2$

Tiefpunkt bei T(2; 2).

Um zu überprüfen, ob es sich hierbei um globale oder lokale Extrema handelt, kann man beispielsweise die Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ berechnen und erhält:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2x^3 - 9x^2 + 12x - 2) = \lim_{x\to\infty}(x^3 \cdot (2 - 9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3}))$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to\infty}(2 - 9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3}) = \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (2 - 9 \cdot 0 + 12 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot 2 = \infty$$

bzw. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 9x^2 + 12x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot 2 = -\infty$

D.h. es handelt sich bei den berechneten Extrema lediglich um lokale Extremwerte.

[Zur Veranschaulichung können Sie die Funktion in ein Achsenkreuz einzeichnen.]

5.6 Wendepunkte

Das Krümmungsverhalten einer Funktion lässt sich auch mit Hilfe der Differentiation bestimmen. Ist nämlich die 2. Ableitung einer Funktion f(x) stetig, so lässt sich die Art der Krümmung an $f''(x)$ für die einzelnen Werte ablesen:

konvex: $f''(x_0) > 0$

konkav: $f''(x_0) < 0$

Ist dabei $f''(x_0) = 0$, so lässt sich keine Aussage über das Krümmungsverhalten der Funktion treffen, denn die Kurve befindet sich an dieser Stelle im Übergang von einer Links- in eine Rechtskurve (oder umgekehrt). Diese Stelle wird als Wendepunkt bezeichnet.

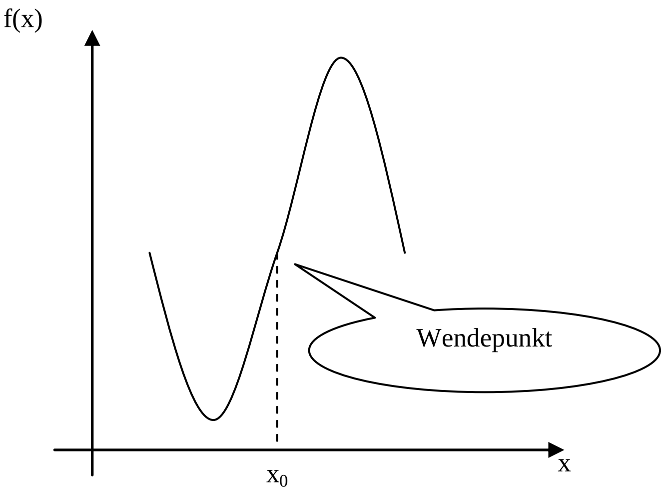


Abbildung 5.7 Wendepunkt einer Funktion

Man erhält demnach als Kriterium für einen Wendepunkt:

Wendepunkt: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Ein Wendepunkt mit einer horizontalen Wendetangente (also mit $f'(x_0) = 0$) wird auch als Sattelpunkt (oder Terrassenpunkt, Stufenpunkt) bezeichnet.

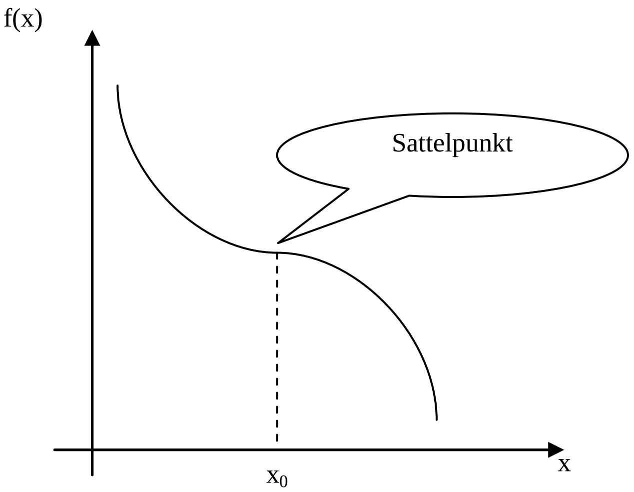


Abbildung 5.8 Sattelpunkt einer Funktion

Beispiel:

Betrachten Sie die Aufgabe aus Beispiel 9.05, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$, und bestimmen Sie für die Funktion f(x) die Wendepunkte, sofern welche existieren. Was kann über das Krümmungsverhalten der Funktion ausgesagt werden?

Gegeben: $f(x)$

Gesucht: $f''(x)$, $f'''(x)$

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$f''(x) = 12x - 18$

$f'''(x) = 12$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow 12x = 18 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

Da $f'''(x) = 12 > 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich gilt, existiert ein Wendepunkt bei $x = 1{,}5$.

Berechnung des zugehörigen Funktionswertes:

$f(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5^3 - 9 \cdot 1{,}5^2 + 12 \cdot 1{,}5 - 2 = 2{,}5$

D.h. es gibt einen Wendepunkt: W(1,5; 2,5).

Krümmungsverhalten:

$f''(x) = 12x - 18$ ist zu untersuchen, also:

$f''(x) = 12x - 18 > 0 \Leftrightarrow x > 1{,}5$

D.h. die Funktion f(x) ist im Intervall (1,5; ∞) konvex.

$f''(x) = 12x - 18 < 0 \Leftrightarrow x < 1{,}5$

D.h. die Funktion f(x) ist im Intervall (–∞; 1,5) konkav.

[Auch hier wird der Sachverhalt verdeutlicht, wenn Sie die Funktion in ein Achsenkreuz einzeichnen.]

5.7 Kurvendiskussion

Mit dem Begriff Kurvendiskussion wird in der Mathematik (und insbesondere in der Analysis) die umfassende Untersuchung einer Funktion bezeichnet. Hierbei werden Aussagen zum Definitionsbereich der Funktion getroffen, Eigenschaften wie Monotonie, Krümmung und Symmetrie detailliert beschrieben und unter Berücksichtigung der Stetigkeit Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte sowie Wendepunkte berechnet. Häufig rundet eine grafische Darstellung die Diskussion ab.

Das mathematische Handwerkszeug für eine ausführliche Kurvendiskussion wurde in den vorherigen Kapiteln bereits erläutert, weshalb hier lediglich die benötigten Formeln noch einmal übersichtlich dargestellt werden:

Definitionsbereich: Festlegung des Definitionsbereiches

Monotonie:

monoton steigend:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$		
streng monoton steigend:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	oder	$f'(x_0) > 0$
monoton fallend:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$		
streng monoton fallend:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	oder	$f'(x_0) < 0$

Symmetrie:

Spiegelsymmetrisch: $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$

Punktsymmetrisch: $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2 \cdot f(x_0)$

Asymptoten: Grenzwertberechnung für Definitionslücken und $x \to \pm\infty$

Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = w$ existiert

Nullstelle N(x_0; f(x_0)): $f(x_0) = 0$

Hochpunkt H(x_0; f(x_0)): $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

Tiefpunkt T(x_0; f(x_0)): $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Wendepunkt W(x_0; f(x_0)): $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Krümmung: $f''(x) > 0$ konvex

$f''(x) < 0$ konkav

Grafische Darstellung: Einzeichnen der Funktion in ein Achsenkreuz

Die obige Darstellung ist eine Aufzählung aller möglichen Punkte, die bei einer Kurvendiskussion Anwendung finden können. Die Reihenfolge der Abarbeitung spielt dabei (neben der Minimierung des Rechenaufwandes) keine wesentliche Rolle. Auch können je nach Fragestellung und Situation einige Punkte unberücksichtigt bleiben.

Beispiel:

Führen Sie für $f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20$ eine Kurvendiskussion durch.

Gegeben: f(x)

Gesucht: Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, etc.

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20$$

Definitionsbereich: x ∈ ℝ, keine Einschränkungen

Als Polynom ist die Funktion ohne Definitionslücken stetig.

Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20 = 0$$

Durch Polynomdivision erhält man für $x_1 = -2$ und für $x_2 = 1$.

Also hat die Funktion f(x) die folgenden Nullstellen:

$N_1(-2; 0)$ und $N_2(1; 0)$

Bestimmung der Extrema:

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 22x$$

$$f''(x) = 20x^3 + 36x^2 + 30x + 22$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 72x + 30$$

Also $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 22x = x \cdot (5x^3 + 12x^2 + 15x + 22) = 0$

Also $x = 0$ oder $x = -2$ (durch Probieren, Polynomdivision oder Ablesen aus Schaubild).

$f''(0) = 20 \cdot 0 + 36 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 22 = 22 > 0$ also Tiefpunkt bei x = 0, Einsetzen in f(x) ergibt:

$f(0) = 0^5 + 3 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 + 11 \cdot 0^2 - 20 = -20$

Also hat die Funktion f(x) folgenden Tiefpunkt:

T(0; –20)

$f''(-2) = 20 \cdot (-2)^3 + 36 \cdot (-2)^2 + 30 \cdot (-2) + 22 = -160 + 144 - 60 + 22 = -54 < 0$ also Hochpunkt, Einsetzen von x = –2 in f(x) ergibt:

$f(-2) = 0$

Also hat die Funktion f(x) folgenden Hochpunkt:

H(–2; 0), dieser ist mit der Nullstelle N_1 identisch.

Bestimmung der Wendepunkte:

$f''(x) = 20x^3 + 36x^2 + 30x + 22 = 0$

Hier lässt sich die Lösung näherungsweise mit dem Newton Verfahren (oder durch Probieren bzw. mit einem Computer) bestimmen zu x = –1,29734. Zur Erläuterung des Newton Verfahrens zur Nullstellenbestimmung wird auf weiterführende Literatur verwiesen.

$f'''(-1{,}297) = 60 \cdot (-1{,}298)^2 + 72 \cdot (-1{,}297) + 30 = 37{,}58 \neq 0$

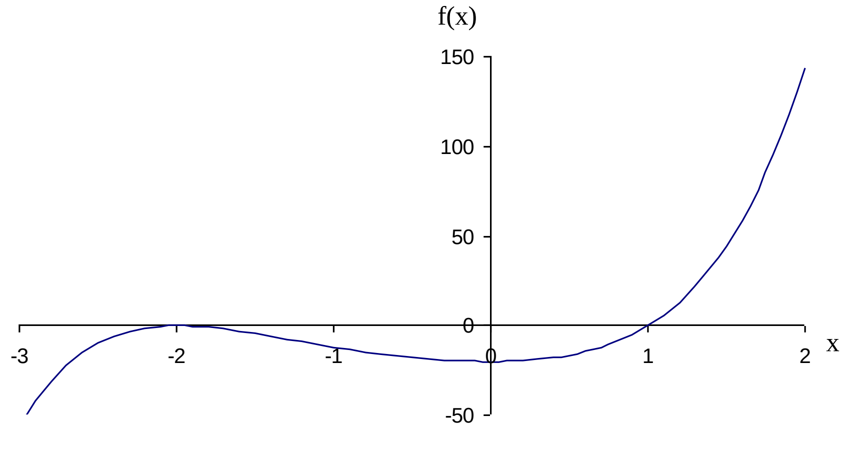
Einsetzen in f(x) liefert:

$f(x) = (-1{,}29734)^5 + 3 \cdot (-1{,}29734)^4 + 5 \cdot (-1{,}29734)^3 + 11 \cdot (-1{,}29734)^2 - 20 = -7{,}580$

Also ergibt sich für den Wendepunkt W(–1,29734; –7,580).

Die Funktion ist links vom Wendepunkt, also im Intervall (–∞; –1,29734) konkav, rechts davon, also im Intervall (–1,29734; ∞), konvex.

Einzeichnen in ein Achsenkreuz ergibt das folgende Schaubild:



Hieraus sind leicht weitere Eigenschaften der Funktion f(x) ersichtlich:

f(x) ist im Intervall (–∞; –2) streng monoton steigend, ebenso im Intervall (0; ∞). Im Intervall (–2; 0) ist f streng monoton fallend.

Bezüglich des Verhaltens am Rand, also bei ±∞, ergibt sich:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^5 \cdot (1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{11}{x^3}-\frac{20}{x^5})) = \lim_{x\to-\infty} (x^5 \cdot 1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^5 \cdot (1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{11}{x^3}-\frac{20}{x^5})) = \lim_{x\to\infty}(x^5 \cdot 1) = \infty$$

Die Funktion besitzt also keine Asymptoten. Zudem ist sie nicht symmetrisch.

5.8 Integralrechnung

Unbestimmtes Integral

Die meisten mathematischen Operationen besitzen Umkehroperationen, die den durchgeführten Rechenvorgang wieder rückgängig machen, also beispielsweise ist die Subtraktion die Umkehroperation zur Addition, die Division zur Multiplikation, das Wurzelziehen zum Potenzieren und so fort. Die zur Differentialrechnung zugehörige Umkehrfunktion ist die Integralrechnung, d.h. mit Hilfe dieser Integralrechnung wird aus der differenzierten Funktion wieder die ursprüngliche Funktion hergestellt. Beispielsweise erhält man aus der 1. Ableitung f'(x) durch Integrieren die ursprüngliche Funktion f(x).

Ist f(x) eine reelle Funktion, dann heißt F(x) Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar ist und für alle x aus dem Definitionsbereich gilt:

Stammfunktion: $F'(x) = f(x)$

Da jedoch die Ableitung einer beliebigen Konstanten c Null ergibt, existieren für f(x) mehrere Stammfunktionen. Die Menge all dieser Stammfunktionen von f wird als unbestimmtes Integral von f bezeichnet und man schreibt dafür:

Unbestimmtes Integral: $\int f(x)\,dx$

Dabei ist das Zeichen $\int$ das Integralzeichen, $f(x)$ der Integrand und x ist die Integrationsvariable, dargestellt durch dx . Zudem gilt:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Ist eine reelle Funktion stetig oder monoton, so ist sie integrierbar. Die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch falsch.

Integrationsregeln

Auch für die Integrationsrechnung gibt es verschiedene Regeln:

Linearität: $\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$

$\int c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int f(x)\ dx$

Partielle Integration: $\int u'(x) \cdot v(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\ dx$

Kurzfassung: $\int u' v\ dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\ dx$

Integration durch Substitution: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f(u)\ du$ mit $u = g(x)$ und $du = g'(x)\ dx$

Sonderfall: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + c$

falls $f(x) \neq 0$ für x ∈ Definitionsbereich

Integrale für spezielle Funktionen lassen sich jeder Formelsammlung entnehmen, die wichtigsten werden für c = const., a ∈ ℝ, b ∈ ℝ, r ∈ ℝ \ {–1} im Folgenden (ohne Beweis) dargestellt:

$\int 0\ dx = c$
$\int a\ dx = ax + c$
$\int ax^r\ dx = \frac{a}{r+1} x^{r+1} + c$
$\int (ax+b)^r\ dx = \frac{(ax+b)^{r+1}}{a \cdot (r+1)} + c$
$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln\|x\| + c$
$\int \sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + c$
$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int e^{kx}\ dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$
$\int \ln x\ dx = x \cdot \ln x - x + c$
$\int \sin x\ dx = -\cos x + c$
$\int \cos x\ dx = \sin x + c$

Tabelle 5.2 Integrationsregeln

Die erste Ableitung einer Funktion kann geometrisch als Steigung interpretiert werden. Leider ist für das unbestimmte Integral keine geometrische Deutung möglich. Dies gelingt erst bei der Betrachtung des bestimmten Integrals.

Bestimmtes Integral

Im Unterschied zum unbestimmten Integral wird beim bestimmten Integral das Integral innerhalb eines Intervalls betrachtet. Als bestimmtes Integral der Funktion f in den Grenzen a und b wird daher der folgende Ausdruck definiert:

Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)\, dx$

Dabei ist a die untere und b die obere Integrationsgrenze. Geometrisch gesehen beschreibt das bestimmte Integral die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall von a bis b:

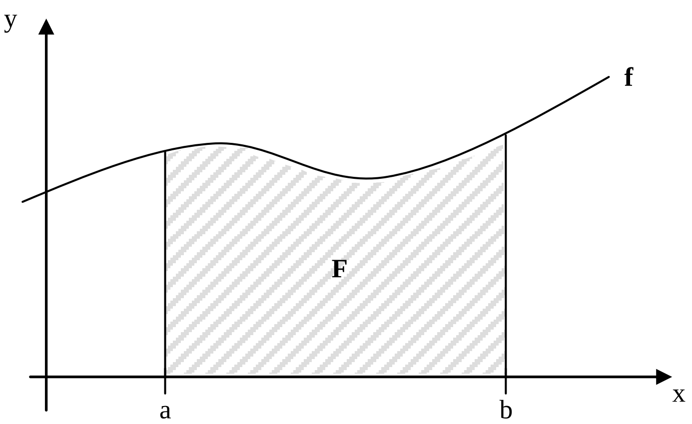


Abbildung 5.9 Bestimmtes Integral

Schneidet die Funktion f die x-Achse innerhalb des Intervalls von a nach b in beispielsweise den beiden Punkten c und d (d.h. die Funktion f besitzt für $x = c$ und $x = d$ Nullstellen), so besteht der gesuchte Flächeninhalt aus mehreren Teilen, die getrennt berechnet werden müssen. Denn wenn die Funktion unterhalb der x-Achse liegt, ist das Integral negativ und verfälscht damit die Berechnung der Fläche. Um dennoch die Gesamtfläche berechnen zu können, werden die Beträge der einzelnen Teilflächen addiert.

Somit ergibt sich:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left|\int_a^c f(x)\, dx\right| + \left|-\int_c^d f(x)\, dx\right| + \left|\int_d^b f(x)\, dx\right| = |F_1| + |F_2| + |F_3| \; :$$

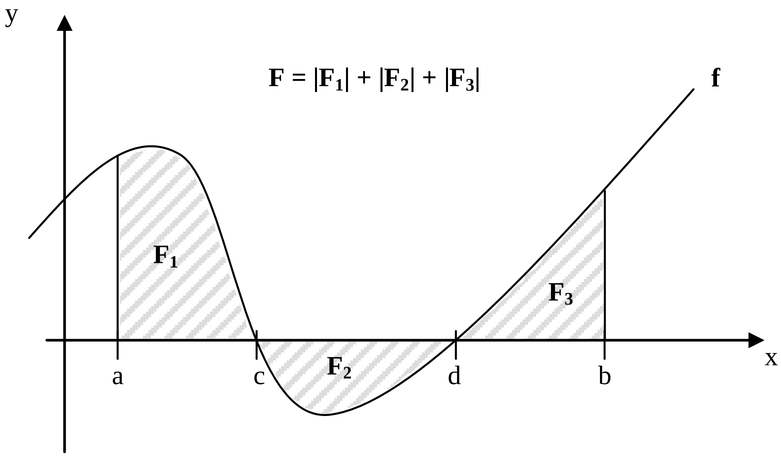


Abbildung 5.10 Bestimmtes Integral einer Funktion mit Nullstellen

Zu beachten ist hierbei, dass das Integral unterhalb der x-Achse negativ ist, bei der Flächenbetrachtung aber lediglich die Beträge der Flächen Berücksichtigung finden. Das bedeutet, dass das bestimmte Integral und die absolute Gesamtfläche nicht immer gleich sind. Daher ist es bei einer Aufgabenstellung mit Flächenberechnung ratsam, die Funktion zunächst auf Nullstellen zu untersuchen, um zu erkennen, in welchen Teilintervallen das Integral negativ wird.

Ist der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) zu bestimmen (also f(x) ≥ g(x) im Intervall [a; b]), so ist das Integral der Differenz, also von $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ zu berechnen:

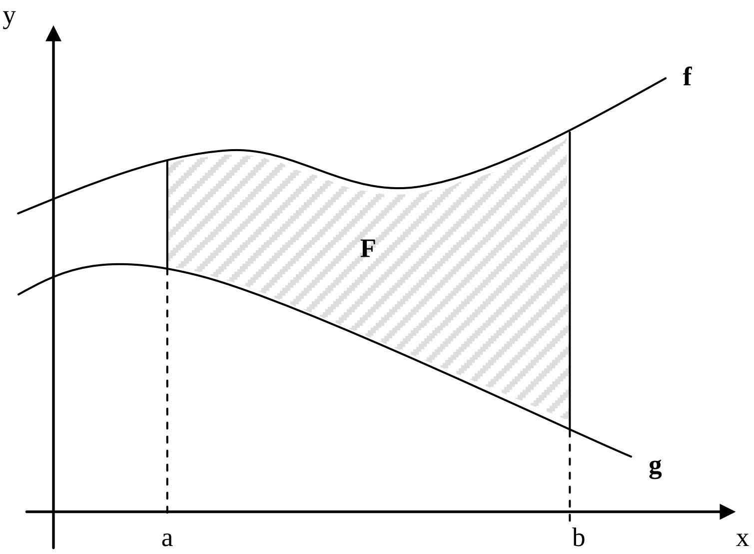


Abbildung 5.11 Integral der Differenz zweier Funktionen

Für die tatsächliche Berechnung von bestimmten Integralen wird der folgende Satz herangezogen:

Hauptsatz der Integralrechnung

Ist f eine integrierbare Funktion auf ℝ mit einer beliebigen Stammfunktion F, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

D.h. zur Berechnung eines bestimmten Integrals einer stetigen Funktion f(x) ist zunächst die Stammfunktion F(x) zu bestimmen und sodann die Formel aus dem Hauptsatz der Integralrechnung anzuwenden.
Häufig findet sich auch die folgende Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Die zuvor aufgestellten Regeln für unbestimmte Integrale gelten analog für bestimmte Integrale.

Beispiel:

1) Wie lautet die zugehörige Stammfunktion zu $f(x) = x^4$?

$f(x) = x^4$

$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + c$

Test: $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + c \Rightarrow F'(x) = 5 \cdot \frac{1}{5}x^4 + 0 = x^4$

Da c abgeleitet Null ergibt, kann für c jeder beliebige Wert eingesetzt werden.
2) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int (9x^2 - 2)\ dx$

$\int (9x^2 - 2)dx = 3x^3 - 2x + c$

b) $\int \frac{2x^3}{x+1} du$

$\int \frac{2x^3}{x+1}\ du = \frac{2x^3}{x+1} \cdot u$ + c

denn hier ist aufgrund von „ *du* “ nicht nach x zu integrieren, sondern nach u!
3) Bestimmen Sie die Stammfunktion der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 6x - 5$

(Linearität) $F(x) = \int 6x - 5\ dx = 3x^2 - 5x + c$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 3$

$F(x) = \int \sqrt{x} + 3\ dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 3x + c$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\ dx = \int x^{-2}\ dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

d) $f(x) = 12x^5 - 5x^4 + 3x^2 - x + 2 \cdot \sqrt{x} - 3$

$F(x) = \int 12x^5 - 5x^4 + 3x^2 - x + 2 \cdot \sqrt{x} - 3\ dx = 2x^6 - x^5 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3} - 3x + c$

e) $g($

(partielle Integration) und

ergibt und

und damit: ($\int u' \cdot v\ dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\ dx$)

f)

($\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f(u)\ du$ mit $u = g(x)$ und $du = g'(x)\ dx$

Substitution: u also und also

Nach dx auflösen: –

Einsetzen ergibt: – –

Integrieren ergibt: – –

Re-Substition von 5:

– – —

4) Berechnen Sie die Fläche unter der Funktion $f(x) = 6x^2$ zwischen den Integrationsgrenzen 1 und 4.

Gegeben: f

Gesucht: $\int f$

$$\int_1^4 f(x)\ dx = \int_1^4 6x^2\ dx = \left[\ 2x^3 + c\ \right]_1^4 = F(4) - F(1) = (2 \cdot 4^3 + c) - (2 \cdot 1^3 + c)$$

$= 2 \cdot 64 + c - 2 \cdot 1 - c = 128 - 2 + c - c = 126$

Die Konstante c fällt bei der Berechnung immer weg, d.h. es kann stets von einer beliebigen Stammfunktion (mit beliebiger Konstante) ausgegangen werden.

5.9 Wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

In den Wirtschaftswissenschaften steht bei Fragestellungen häufig eine ökonomische Funktion im Mittelpunkt, die mit Hilfe einer Kurvendiskussion näher charakterisiert werden soll. In der Praxis sind dies beispielsweise Funktionen zur Berechung von Kosten, Umsatz oder Gewinn.

Kostenfunktion

Ist eine Kostenfunktion $K(x)$ für die Produktionsmenge x gegeben, so erhält man die zugehörigen Grenzkosten aus der 1. Ableitung. Diese Grenzkostenfunktion $K'(x)$ gibt näherungsweise an, wie sich die Gesamtkosten ändern, wenn die Produktionsmenge x um eine Einheit verändert wird (und das erspart häufig Rechenaufwand zur exakten Berechnung).

Die allgemeine Kostenfunktion K(x) setzt sich im linearen Fall aus den von der Menge x unabhängigen Fixkosten und den von der Menge x abhängigen variablen Kosten zusammen. Mathematisch lässt sich die lineare Kostenfunktion daher schreiben als $K(x) = K_{\text{var}} \cdot x + K_{fix}$.

Häufig hat die Kostenfunktion jedoch auch einen progressiven, einen degressiven oder einen S-förmigen Verlauf. Auf die mathematische Darstellung solcher Funktionen wird im Rahmen dieses Moduls jedoch verzichtet und auf spezielle makro- und mikroökonomische Literatur verwiesen.

Beispiel:

Asterix hat für seinen Freund Obelix die Kostenfunktion für die Produktion der Hinkelsteine ermittelt; sie lautet $K(x) = \frac{x^2}{10} + 2x + 20$.

Wie hoch sind die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 5 Hinkelsteinen?

Gegeben: K(x)

Gesucht: $K'(5)$

$$K'(x) = \frac{2x}{10} + 2 = \frac{x}{5} + 2$$

$$K'(5) = \frac{5}{5} + 2 = 3$$

Bei einer Produktionsmenge von 5 Hinkelsteinen betragen die Grenzkosten 3 Sesterzen.

[Exakte Berechnung: K(6) – K(5) = 35,6 – 32,5 = 3,10 Sesterzen.]

Umsatzfunktion

Der Umsatz ergibt sich aus der Multiplikation von Preis p und Menge x zu $U(x) = p \cdot x$. In der Praxis ist dabei der Preis häufig eine konstante Größe, da Unternehmen mit einem geringen Marktanteil den Preis nicht beeinflussen können. Auch hier ist die 1. Ableitung der Umsatzfunktion die Grenzumsatzfunktion und gibt näherungsweise an, um welchen Betrag sich der Umsatz bei Änderung der abgesetzten Menge um eine Einheit ändert.

Beispiel:

Salpetrix hat ein neues Massageöl auf den Markt gebracht, welches er zu 12 Sesterzen das Fläschchen verkauft. Wie lautet die Umsatzfunktion in Abhängigkeit der verkauften Fläschchen?

x: Anzahl der verkauften Fläschchen

Gewinnfunktion

Der Gewinn berechnet sich aus Umsatz abzüglich der Kosten, d.h. für die Gewinnfunktion ergibt sich $G(x) = U(x) - K(x)$. Die Grenzgewinnfunktion $G'(x)$ gibt dabei näherungsweise an, wie sich der Gewinn ändert, wenn die Produktionsmenge x um eine Einheit verändert wird.

Liegt einem Unternehmen die Gewinnfunktion vor, so lässt sich hieraus die Gewinnmaximierung mathematisch berechnen, indem man das Maximum der Gewinnfunktion ermittelt. Das bedeutet, man setzt $G'(x) = U'(x) - K'(x) = 0$.

Beispiel:

Beim Kostümproduzenten Narrenfix ergibt sich für den Verkauf von Kostümen eine Gewinnfunktion von

. Bei welcher Produktionsmenge liegt das Gewinnmaximum?

via Mitternachtsformel:

Bei 32 Stück.

Integralrechnung

In den Wirtschaftswissenschaften hat die Integralrechnung nur eine geringe Bedeutung, da ihre Anwendungsmöglichkeiten begrenzt sind. Die beiden Hauptanwendungsbereiche sind dabei zum einen die Umkehrung der Differentiation und zum anderen die Berechnung von Flächen, die von ökonomischen Funktionen eingegrenzt werden.

Bei der erstgenannten Anwendung geht es dabei lediglich darum, vom Grenzverhalten einer ökonomischen Funktion auf die Funktion selbst zu schließen.

Bei der anderen Anwendung, nämlich der Flächenberechnung, ist insbesondere die Bestimmung der so genannten Konsumentenrente und Produzentenrente zu nennen.

Hierbei wird von einem durch Angebot und Nachfrage bestimmten Gleichgewichtspreis (x*; p*) ausgegangen. Die Konsumentenrente (oder auch consumer's surplus) beschreibt dabei den zurückbehaltenen Betrag, den sich die Käufer dadurch sparen, dass der Gleichgewichtspreis doch geringer ausgefallen ist als ihre persönliche Kaufschwelle. Denn eigentlich hätte ein Teil der Käufer das Produkt auch zu einem höheren Preis als dem Gleichgewichtspreis erworben. Dieser dadurch erzielbare höhere Umsatz, der jedoch eingespart wurde, führt zur Konsumentenrente, die in der folgenden Grafik schraffiert wurde:

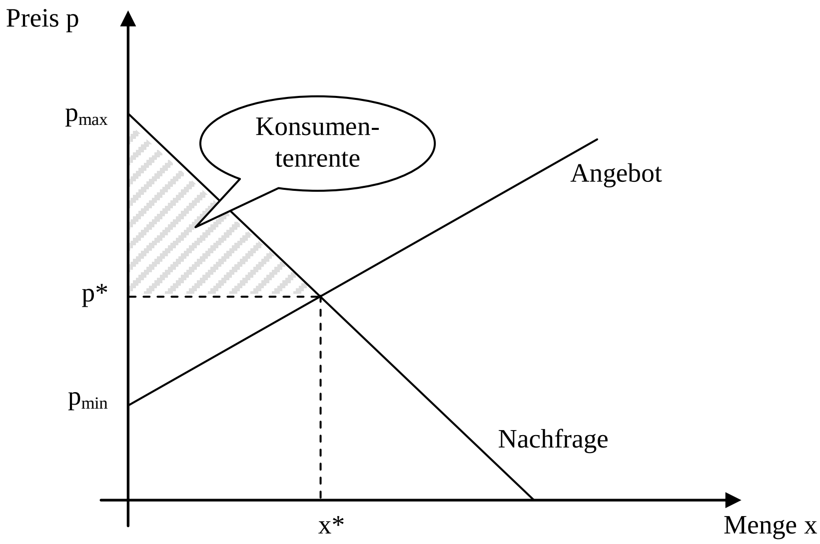


Abbildung 5.12 Konsumentenrente

Analog verhält es sich mit der Produzentenrente (oder auch producer's surplus): Einige Produzenten wären bereit, ihre Produkte auch zu einem niedrigeren Preis als dem Gleichgewichtspreis zu verkaufen. Die durch den Gleichgewichtspreis erzielten Mehreinnahmen entsprechen der Produzentenrente, die in der folgenden Grafik schraffiert wurde:

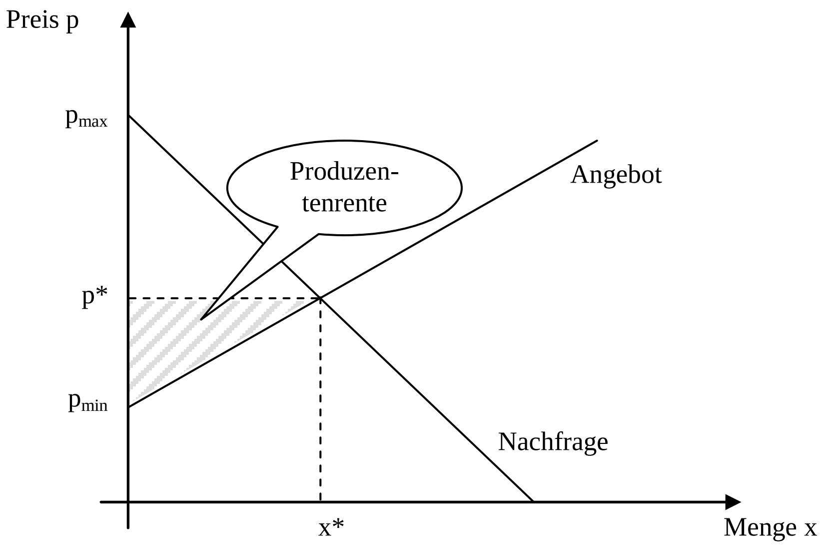


Abbildung 5.13 Produzentenrente

Die beiden Flächen und damit die Konsumenten- sowie die Produzentenrente lassen sich bei linearen Funktionen (wie in der Grafik) mittels geometrischen Berechnungen bestimmen, bei komplizierten Funktionen ist hierfür jedoch das Integral notwendig.

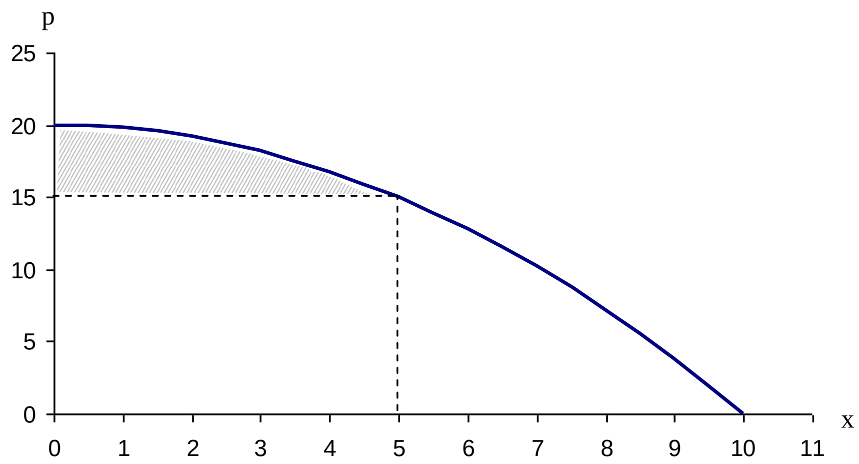
Beispiel:

Automatix hat in seinem Produktsortiment unter anderem eine besondere Axt, deren Nachfragefunktion durch $p = -\frac{1}{5}x^2 + 20$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Konsumentenrente der gallischen Dorfbewohner bei einem Marktpreis von 15 Sesterzen.

Gegeben: $p = -\frac{1}{5}x^2 + 20$, $p^* = 15$

Gesucht: Konsumentenrente

Zur besseren Übersichtlichkeit wird zunächst die Nachfragefunktion in ein Achsenkreuz eingezeichnet und der Marktpreis p* (= Gleichgewichtspreis) gestrichelt hinzugefügt sowie die gesuchte Konsumentenrente schraffiert:



Aus der Grafik ist ersichtlich, dass Automatix bei einem Marktpreis von 15 Sesterzen 5 Äxte verkauft.

Um die schraffierte Fläche zu erhalten, ist vom Integral von p im Intervall (0; 5) noch das unschraffierte Quadrat abzuziehen:

$$R_{Konsum} = \int_0^5 p\ dx - A_{\mathrm{Re}chteck}$$

Bestimmung des Integrals von p in den Grenzen 0 und 5 ergibt:

$$\int_0^5 p\ dx = \int_0^5 (-\frac{1}{5}x^2 + 20)\ dx = \left[-\frac{1}{15}x^3 + 20x\right]_0^5 = -\frac{1}{15}\cdot 5^3 + 20\cdot 5 - (-\frac{1}{15}\cdot 0^3 + 20\cdot 0)$$

$$= -\frac{25}{3} + 100 = \frac{275}{3} \approx 91{,}67$$

Der Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet sich aus dem Produkt von Länge mal Breite, also:

$$A_{\mathrm{Re}chteck} = 5 \cdot 15 = 75$$

Und damit ergibt sich die Konsumentenrente zu:

$$R_{Konsum} = \int_0^5 p\ dx - A_{\mathrm{Re}chteck} = \frac{275}{3} - 75 = \frac{50}{3} \approx 16{,}67$$

6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zusammenfassung
- von Kapitel 6 -

Wichtige Teilgebiete der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind die

- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie,
- Grundzüge der Mengenlehre, der
- klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff, das
- Axiomensystem und die Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten sowie die vier Fälle der
- Kombinatorik.

Lernziele
Der Studierende soll mit den

- grundlegenden Begrifflichkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie vertraut sein sowie die für die
- Wahrscheinlichkeitsberechnung notwendigen Möglichkeiten mittels der
- Kombinatorik (mit und ohne Wiederholung und mit und ohne Zurücklegen) berechnen können.

Literaturhinweise
Wewel, Max C. (2010): Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL, Hallbergmoos.

6.1 Grundbegriffe und Mengenlehre

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei welcher Zufallsvorgänge untersucht werden, bildet die Basis für die Methoden der mathematischen Statistik.

Zufall

Ein Zufall ist ein nicht vorauszusehendes Ereignis.

Zufallsexperiment

Unter einem Zufallsexperiment versteht man einen Vorgang, der unter konstanten Rahmenbedingungen beliebig wiederholbar ist und dessen Resultat nicht sicher vorhergesagt werden kann.

Elementarereignis

Jedes Zufallsexperiment besitzt mehrere mögliche elementare Ereignisse, von welchen bei jeder einzelnen Durchführung des Experiments jeweils nur eines eintreten kann. Diese Ereignisse heißen Elementarereignisse und werden mit $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ bezeichnet.

Ereignisraum

Die Menge aller zu einem Zufallsexperiment gehörigen Elementarereignisse heißt Ereignisraum oder Ereignismenge und wird mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$bezeichnet.

Zufälliges Ereignis

Ereignis oder auch zufälliges Ereignis wird jede beliebige Teilmenge des Ereignisraumes genannt. Die Ereignisse werden häufig mit A, B, ... bezeichnet und bestehen aus einem oder mehreren Elementarereignissen.

Sicheres Ereignis

Man spricht von einem sicheren Ereignis, wenn das Ereignis A immer eintritt, d.h. $A = \Omega$.

Unmögliches Ereignis

Ein unmögliches Ereignis ist dann gegeben, wenn das Ereignis A sicher nicht eintritt, d.h. es gilt $A = \emptyset$.
[Anmerkung: $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge]

Beispiel:

Einmaliges Werfen eines idealen Würfels. „Ideal“ bedeutet hierbei, dass jede der sechs Seiten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt.

Zufall: Ergebnis beim Würfeln.

Zufallsexperiment: einmaliges Werfen dieses Würfels.

Elementarereignis: ein mögliches Ergebnis, also z.B. die Zahl „4“, $\omega = \{4\}$.

Ereignisraum: Ω (Omega) ist die Menge der möglichen Zahlen, also Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Zufälliges Ereignis: z.B. das Ereignis „gerade Zahl“, also A = {2; 4; 6}

Sicheres Ereignis: Es kommt auf jeden Fall eine Zahl von 1 bis 6.

Unmögliches Ereignis: B = {7} ist ein unmögliches Ereignis, da die Zahl 7 nicht gewürfelt werden kann.

Äquivalenzereignisse

Als Äquivalenzereignisse werden Ereignisse bezeichnet, die identisch sind, d.h. genau dann, wenn A eintritt, tritt B ein und umgekehrt. Es gilt A = B.

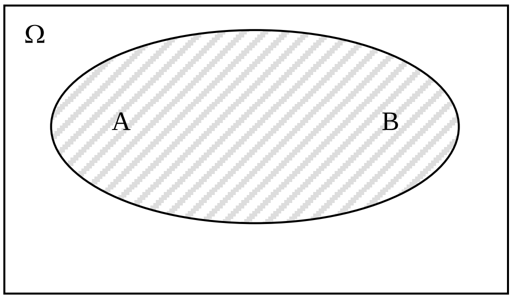


Abbildung 6.1 Äquivalenzereignisse

Teilereignis

Wenn alle Ereignisse, die in A enthalten sind, gleichzeitig auch in B enthalten sind, spricht man von einer so genannten Relation $A \subset B$ („A ist Teilereignis von B“ oder auch „B enthält A“). Hierbei wird nicht zwischen $A \subset B$ und $A \subseteq B$ unterschieden, sondern das Zeichen $\subset$ wird sowohl für das echte als auch unechte Teilereignis verwendet.

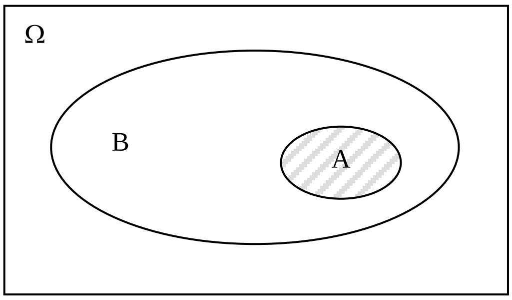


Abbildung 6.2 Teilereignisse

Komplementärereignis

Ein Ereignis, das genau dann eintritt, wenn A nicht eintritt, heißt das zu A komplementäre Ereignis oder Komplementärereignis von A und wird mit $\overline{A}$ (auch „nicht A“) bezeichnet.

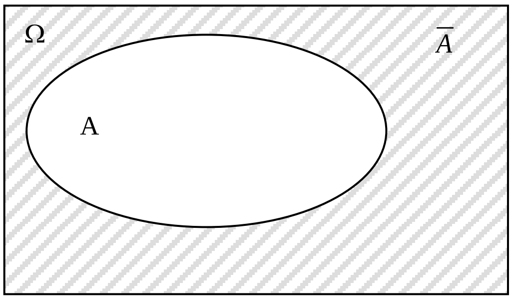


Abbildung 6.3 Komplementärereignisse

Vereinigung von Ereignissen

Die Vereinigung A ∪ B umfasst alle Elementarereignisse, die in mindestens einem der Ereignisse A oder B enthalten sind.

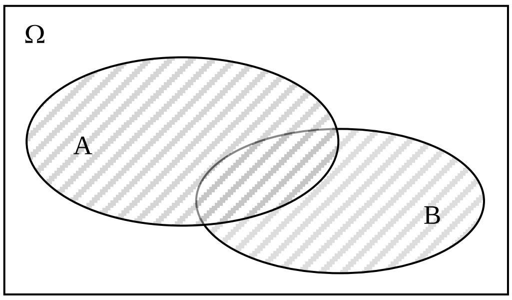


Abbildung 6.4 Vereinigung von Ereignissen

Durchschnitt von Ereignissen

Der Durchschnitt A ∩ B umfasst alle Elementarereignisse, die in beiden Ereignissen A und B gleichzeitig enthalten sind.

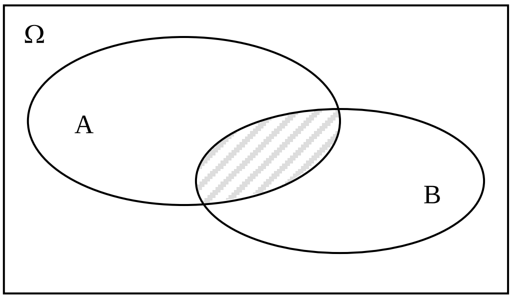


Abbildung 6.5 Durchschnitt von Ereignissen

Disjunkte Ereignisse

Gibt es kein Elementarereignis, das sowohl zu A als auch gleichzeitig zu B gehört, so sind die beiden Ereignisse disjunkt, d.h. wenn A eintritt, tritt B nicht ein (denn die Schnittmenge ist leer).

Es gilt $A \cap B = \emptyset$.

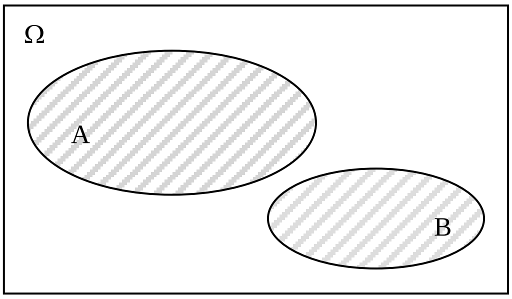


Abbildung 6.6 Disjunkte Ereignisse

Differenz von Ereignissen

Das Ereignis A – B (auch A \ B, „A ohne B“) ist das Ereignis, welches aus den Elementarereignissen gebildet wird, die in A aber nicht in B enthalten sind, und wird mit Differenz bezeichnet.

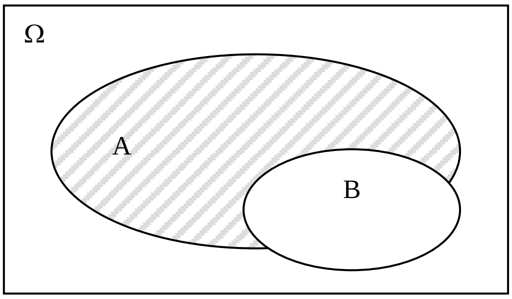


Abbildung 6.7 Differenz von Ereignissen

Beispiel:

1) Eine Urne U1 enthält rote und schwarze Kugeln, eine Urne U2 weiße und schwarze Kugeln. Zunächst wird aus U1, dann aus U2 eine Kugel gezogen und beide Male die Farbe notiert.

Wie lautet die Ergebnismenge?

S = {rw, rs, sw, ss}

2) In einer Urne befinden sich eine rote, eine schwarze und eine weiße Kugel. Man zieht ohne Zurücklegen Kugel um Kugel, bis man die rote Kugel gezogen hat.

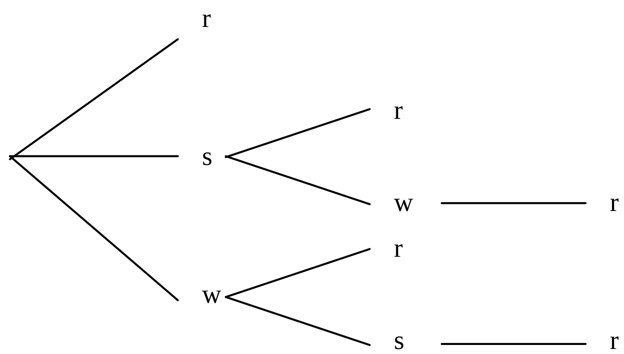
a) Geben Sie die Ergebnismenge an, wenn die Anzahl der Züge interessiert.

S = {1, 2, 3}

b) Geben Sie die Ergebnismenge der Reihenfolge, in der die Farben gezogen werden, an.

S = {r, sr, wr, swr, wsr}

c) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.



[Wären a) und b) mithilfe dieses Baumdiagramms einfacher zu beantworten gewesen?]

6.2 Wahrscheinlichkeitsbegriff

Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit quantifiziert die Chance des Eintretens eines zufälligen Ereignisses A und wird mit P(A), $0 \le P(A) \le 1$ bezeichnet. In empirischen Situationen entspricht die Wahrscheinlichkeit der relativen Häufigkeit, mit der ein zufälliges Ereignis eintritt (=Anzahl der Realisationen / Anzahl der durchgeführten Versuche).

Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

Die klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace (1749-1827) berechnet sich aus der Anzahl der für A günstigen Fälle im Verhältnis zur Anzahl aller möglichen Fälle und ergibt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A.

Klassische Wahrscheinlichkeit P(A): $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}}$

Beispiel:

1) Einmaliges Würfeln mit einem idealen Würfel.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Zahl „4“ gewürfelt?

$$P(A) = \frac{\textit{günstige Fälle}}{\textit{alle Fälle}} = \frac{\{4\}}{\{1;2;3;4;5;6\}} = \frac{1}{6} = 0{,}1667 = 16{,}67\%$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt eine ungerade Zahl?

$$P(A) = \frac{\textit{günstige Fälle}}{\textit{alle Fälle}} = \frac{\{1;3;5\}}{\{1;2;3;4;5;6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

2) Sie sitzen bei „Wer wird Millionär“ und müssen die 125.000-€-Frage mit einer der 4 Möglichkeiten A, B, C oder D beantworten. Leider haben Sie keine Ahnung und wissen lediglich, dass Antwort D ausscheidet. Da Sie bereits alle Joker verbraucht haben, müssen Sie sich nun entscheiden, ob Sie die Lösung auf gut Glück erraten oder lieber aufhören.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die richtige Antwort erraten?

$$P(A) = \frac{Anzahl\,der\;richtigen\;Antworten}{Anzahl\,aller\;möglichen Antworten} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 = 33{,}33\%$$

b) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit, wenn Sie nicht wüssten, dass D ausscheidet?

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

6.3 Axiomensystem und Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

Die unten angeführten drei Minimalforderungen, die auf A.N. Kolmogoroff (1903-1987) zurückgehen, heißen die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung und definieren die mathematischen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit. Jede Funktion P, die jedem Ereignis A eine Zahl P(A) so zuordnet, dass diese drei Axiome erfüllt sind, wird mit Wahrscheinlichkeitsfunktion (oder auch Wahrscheinlichkeitsmaß) bezeichnet.

Axiomensystem

1. Axiom: Nichtnegativität

Jedem zufälligen Ereignis A ist eine bestimmte Zahl P(A) zugeordnet; es gilt $P(A) \geq 0$.

2. Axiom: Normierung

Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses beträgt 1, also $P(\Omega) = 1$.

3. Axiom: Additivität

Die Wahrscheinlichkeit, dass eines von endlich oder abzählbar unendlich vielen unvereinbaren Ereignissen (d.h. für alle $i \neq j$ gilt $Ai \cap Aj = 0$) eintritt, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten

Im Folgenden sind einige Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten, die sich aus den Axiomen ableiten lassen, aufgeführt:

1) Für die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses gilt $P(\emptyset) = 0$.

2) Für die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses gilt $P(\Omega) = 1$.

3) Ist $A \subseteq B$, so gilt $P(A) \leq P(B)$.

4) Für die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses gilt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5) Es gilt $A \cup \overline{A} = \Omega$ und $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

6) Es gilt $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

Ebenso lassen sich folgende Additionsgesetze ableiten:

Additionssatz allgemein: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Additionssatz für n disjunkte Ereignisse: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ für $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $i \neq j$

Beispiel.

Vollziehen Sie die oben genannten sechs Eigenschaften für das folgende Zufallsexperiment nach: Einmaliges Würfeln eines idealen Würfels.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A_{ungerade} = \{1; 3; 5\}$, $B_{gerade} = \{2; 4; 6\}$ und $C_6 = \{6\}$.

Mächtigkeit der Mengen: $|\Omega| = 6$; $|A| = 3$; $|B| = 3$; $|C| = 1$

Zugehörige Wahrscheinlichkeiten: $P(\Omega) = 1$; $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}167$

1) Für die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses gilt $P(\emptyset) = 0$.

$\Rightarrow$ P(leere Menge) = 0

2) Für die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses gilt $P(\Omega) = 1$.

$\Rightarrow P(\Omega) = P(\{1;2;3;4;5;6\}) = 1$

3) Ist $C \subseteq B$, so gilt $P(C) \leq P(B)$:

$\Rightarrow \{6\} \subseteq \{2,4,6\}$, also $0{,}167 \leq\ = 0{,}5$

4) Für die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses gilt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$\Rightarrow$ $P(\overline{A}) = P(\{2;4;6\}) = 0{,}5$ und $1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

5) Es gilt $A \cup \overline{A} = \Omega$ und $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

$\Rightarrow \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \Omega$ und $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$

6) Es gilt $P(B) = P(C \cap B) + P(\overline{C} \cap B)$

$\Rightarrow$ P(B) = 0,5 und $P(C \cap B) + P(\overline{C} \cap B) =$ P({6}) + P({2, 4}) = 0,167 + 0,333 = 0,5

6.4 Kombinatorik

Für das Verständnis von theoretischen Verteilungen sind Kenntnisse der Kombinatorik unerlässlich, weshalb in diesem Kapitel die Grundzüge dieses Spezialgebietes der Mathematik dargestellt werden.

Grundlage der Kombinatorik ist die Berechnung der Anzahl von gewissen Möglichkeiten (z.B. Auf wie viele verschieden Arten kann man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 hintereinander anordnen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen fünf Zahlen je zwei auszuwählen?), d.h. die Hauptaufgabe der Kombinatorik besteht darin, die Anzahl der möglichen Anordnungen zu bestimmen.

Allgemein gilt, dass es für N voneinander verschiedene Elemente insgesamt $N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Permutationen gibt.

Für dieses Produkt schreibt man auch $N!$ („N-Fakultät") und definiert $0! = 1$.

Beispiel:

1) Berechnen Sie 4!

2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Briefe zufällig in 5 Umschläge zu stecken?

5! = 120 Möglichkeiten

3) Wenn Sie 3 verschieden Hosen und 5 verschieden Pullover besitzen, wie viele Kombinationsmöglichkeiten haben Sie dann?

Möglichkeiten

4) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, bei denen alle Ziffern Null oder gerade sind (die erste Ziffer darf hierbei nicht 0 sein)?

An der ersten Stelle: 2; 4; 6; oder 8 und damit 4 Möglichkeiten

An der zweiten Stelle: 0; 2; 4; 6; oder 8 und damit 5 Möglichkeiten

An der dritten Stelle: 0; 2; 4; 6; oder 8 und damit 5 Möglichkeiten

$\Rightarrow 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ Möglichkeiten

Anordnungen von jeweils n dieser N Elemente heißen Kombinationen n-ter Ordnung. Man unterscheidet hierbei Kombinationen mit und ohne Wiederholung (bzw. Zurücklegen), je nach dem, ob ein Element in einer einzelnen Kombination nur ein Mal oder mehrere Male auftreten kann.

Je nach dem, ob die Anordnung und damit die Reihenfolge der Elemente berücksichtigt wird, spricht man von Kombinationen mit bzw. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (häufig auch geordnete bzw. ungeordnete Stichprobe). Kombinationen mit Berücksichtung der Anordnung werden auch als Variationen bezeichnet.

Kombination ohne Wiederholung mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Werden bei einer geordneten Stichprobe ohne Zurücklegen aus N Elementen n Elemente ausgewählt, so berechnet sich die Anzahl der Kombinationen durch $N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1)$:

$$\frac{N!}{(N-n)!}$$

Beispiel:

Wie viele sechsstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, ..., 9 bilden, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf?

$$\frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60.480$$

Kombination ohne Wiederholung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Werden bei einer ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen n Elemente aus N entnommen, so ergibt sich für die Anzahl der Kombinationen:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

Ausdrücke dieser Form („N über n“ oder „n aus N“) heißen Binomialkoeffizienten. Zur schnellen Berechnung gibt es hierfür auf wissenschaftlichen Taschenrechnern die Taste „nCr“.

Beispiel:

1) Auf wie viele Arten kann man aus 12 Personen eine Vierergruppe wählen?

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = \frac{12!}{4!*8!} = \frac{9*10*11*12}{1*2*3*4} = \frac{11.880}{24} = 495$$

2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt man beim Lotto (auch „6 aus 49“ genannt) sechs Richtige?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{49!}{6!\cdot 43!} = 13.983.816$$

[in den Taschenrechner „49 nCr 6 =“ eintippen]

3) Unter den 250 Losen einer Lotterie befinden sich 50 Gewinnlose. Gleich zu Beginn kaufen Sie 20 Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie dabei genau 5 Gewinne gezogen?

Mögliche Ereignisse: $\binom{250}{20} = \frac{250!}{20!\,(250-20)!} = \frac{250!}{20!\cdot 230!} = 1{,}7\cdot 10^{29}$

Günstige Ereignisse: $\binom{50}{5}\cdot\binom{200}{15} = \frac{50!}{5!\,(50-5)!}\cdot\frac{200!}{15!\,(200-15)!} = 3{,}1\cdot 10^{28}$

$$\frac{1\cdot 10}{\cdot 10}$$

Kombination mit Wiederholung mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Werden bei einer geordneten Stichprobe mit Zurücklegen n der N Elemente ausgewählt, so berechnet sich die Anzahl der Kombinationen wie folgt:

$$N^n$$

Beispiel:

1) Aus einer Urne mit 3 Kugeln der Aufschrift „M“, „R“ bzw. „E“ wird viermal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man das Wort „MEER“?

Es gibt 3^4 verschieden Möglichkeiten, nur 1 davon ist richtig, also P(„MEER“) = 1/81 = 0,012 = 1,2 %

2) Beim Morsen verwendet man nur die Zeichen Punkt und Strich. Wie viele Morse-Wörter mit mindestens einem aber höchstens fünf Zeichen sind möglich?

1 Zeichen: $2^1 = 2$ Wörter

2 Zeichen: $2^2 = 4$ Wörter

3 Zeichen: $2^3 = 8$ Wörter

4 Zeichen: $2^4 = 16$ Wörter

5 Zeichen: $2^5 = 32$ Wörter

Summe: $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$

Kombination mit Wiederholung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Werden bei einer ungeordneten Stichprobe mit Zurücklegen n der N Elemente entnommen, so gilt für die Anzahl der Kombinationen:

$$\binom{N+n-1}{n}$$

Beispiel:

Bei einem Sonderangebot kann man sich eine Kiste (12 Flaschen) aus 3 verschiedenen Getränkesorten beliebig zusammenstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$$\binom{3+12-1}{12} = \binom{14}{12} = 91$$

Zusammenfassung:

Kombination	**ohne** Reihenfolge	**mit** Reihenfolge
ohne Wiederholung	$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$	$\frac{N!}{(N-n)!}$
mit Wiederholung	$\binom{N+n-1}{n}$	N^n

Formelsammlung

Alle hier nicht aufgeführten Formeln werden als bekannt vorausgesetzt bzw. können aus den dargestellten Formeln hergeleitet werden.

Kapitel 1

$\mathbb{N}$	$\{0; 1; 2; 3; ...\}$
$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z}$	$\{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$
$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$
$\mathbb{Q}$	$\{\frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Q}^+$	$\{q \mid q \geq 0 \text{ und } q \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{Q}^-$	$\{q \mid q \leq 0 \text{ und } q \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{R}$	$\{x \mid x = \lim\limits_{n\to\infty} q_n, q_n \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}^+$	$\{x \mid x \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^-$	$\{x \mid x \leq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Kommutativgesetze (Vertauschungsgesetze):	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze (Verbindungsgesetze):	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	
Neutrale Elemente 0 bzw. 1:	$a+0=0+a=a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Multiplikation mit 0:	–	$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Binomische Formeln:

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Arithmetisches Mittel: $m_a = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$

Geometrisches Mittel: $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$

Potenzgesetze:

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ $\qquad$ $x^n \cdot y^n = (xy)^n$

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ $\qquad$ $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ $\qquad$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n}$ $\qquad$ $(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$

Wurzelgesetze:

$\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[mn]{x^{m+n}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x^{n-m}}$ für x ≠ 0 $\qquad$ $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ für y ≠ 0

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $\qquad$ $x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ $\qquad$ $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

Logarithmengesetze:

$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ $\qquad$ $\log_b (\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$

$\log_b (x^r) = r \cdot \log_b x$ $\qquad$ $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$

$\log_b \frac{x}{y} = -\log_b \frac{y}{x}$

Kapitel 2

Punktsteigungsform: $a = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ für $x_1 \neq x$

Zweipunkteform: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ für $x_2 \neq x_1$, $x_1 \neq x$

Quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$ Lösung: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Produktform: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Normierte Form: $x^2 + px + q = 0$ Lösung: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Produktform: $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Satz von Vieta: x_1, x_2 Lösungen von $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Kapitel 3

Prozentwert $W = G \cdot \frac{p}{100} = G \cdot i$

Grundwert $G = W \cdot \frac{100}{p} = \frac{W}{i}$

Prozentzahl $p = \frac{W}{G} \cdot 100$

Prozentsatz $i = \frac{W}{G}$

Lineare Verzinsung:

Anfangskapital: $K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i}$

Laufzeit: $n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i}$

Zinssatz: $i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n}$

Endkapital: $K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$

Deutsche Methode (Sparbuchmethode): 30 / 360

Euro-Zinsmethode: actual / 360

Englische Methode: actual / actual

Exponentielle Verzinsung:

Anfangskapital: $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$

Laufzeit: $n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+i)}$

Zinssatz: $i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$

Endkapital: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

Aufzinsungsfaktor: $(1+i)^n$

Abzinsungsfaktor: $(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n}$

Kapitel 4

Matrizengesetze:

Kommutativgesetz	$A+B=B+A$
Assoziativgesetz	$A+(B+C)=(A+B)+C$
Distributivgesetz	$k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$

Vektorgesetze:

Kommutativgesetz	$a^T\cdot b=b^T\cdot a$
Distributivgesetz	$(a^T+b^T)\cdot c=a^T\cdot c+b^T\cdot c$

Matrizenmultiplikation:

Assoziativgesetz	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot B\cdot C$
Distributivgesetz	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

Invertierte Matrizen: $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$ $\quad$ $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$ $\quad$ $(k\cdot A)^{-1}=\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$

linear unabhängig: $a=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n=0 \quad\Leftrightarrow\quad k_i=0$

Rang einer Matrix: größte Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren)

Determinante:

1×1-Matrix: $\det(A)=|a|=a$

2×2-Matrix: $\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

3×3-Matrix: $\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ (Regel von Sarrus)

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

allgemein: $\begin{matrix}+ & - & + & - & + & \ldots\\ - & + & - & + & - & \ldots\\ + & - & + & - & + & \ldots\\ - & + & - & + & - & \ldots\\ + & - & + & - & + & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{matrix}$ Vorzeichenwechsel (Entwicklungssatz von Laplace)

Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen:

$rang(A)<rang(A\,|\,b) \Rightarrow A\cdot x=b$ nicht lösbar

$rang(A)=rang(A\,|\,b)=r$ und $r<n \Rightarrow$ es existieren unendlich viele Lösungen

$rang(A)=rang(A\,|\,b)=r$ und $r=n \Rightarrow A\cdot x=b$ besitzt genau eine (eindeutige) Lösung

Cramer'sche Regel: $x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(A)}$

Kapitel 5

Funktion: $f(x) = y$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(y) = x$

Monotonie:

monoton steigend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

streng monoton steigend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ oder $f'(x_0) > 0$

monoton fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

streng monoton fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ oder $f'(x_0) < 0$

Symmetrie:

spiegelsymmetrisch $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$

Punktsymmetrisch $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2 \cdot f(x_0)$

Arithmetische Folge: (a_n) mit $a_{n+1} = a_n + d$ und d $\in \mathbb{R}$

Geometrische Folge: (a_n) mit $a_{n+1} = a_n \cdot q$ und q $\in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Arithmetische Reihe: $\sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot \left(a_1 + \frac{n-1}{2} \cdot d \right)$

Geometrische Reihe: $\sum_{i=1}^{n} q_i = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Ableitungsregeln:

Summenregel: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Faktorregel: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotientenregel: $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Kettenregel: $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$c \cdot x^r$	$c \cdot r \cdot x^{r-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
x^x	$x^x \cdot (1 + \ln x)$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$

$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

de l'Hospital: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ falls $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert

Steigung: streng monoton steigend: $f'(x_0) > 0$

streng monoton fallend: $f'(x_0) < 0$

Satz von Rolle: $f(a) = f(b) \Rightarrow$ mind. eine Extremstelle existiert in [a, b]

Krümmung: konvex $f''(x) > 0$

konkav $f''(x) < 0$

Nullstellen: $f(x) = 0$

Maximum: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

Minimum: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Wendepunkt: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Integrationsregeln: Linearität:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

Partielle Integration:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

kurz: $\int u' v\,dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\,dx$

Integration durch Substitution:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

mit $u = g(x)$ und $du = g'(x)\,dx$

Sonderfall:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

falls $f(x) \neq 0$ für x $\in$ Definitionsbereich

$$\int 0\,dx = c$$

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int ax^r\,dx = \frac{a}{r+1} x^{r+1} + c$$

$$\int (ax+b)^r\,dx = \frac{(ax+b)^{r+1}}{a \cdot (r+1)} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3} + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

Kapitel 6

Klassische Wahrscheinlichkeit P(A): $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$

Kombination ohne Whg. mit Anordnung: $\frac{N!}{(N-n)!}$

Kombination ohne Whg. ohne Anordnung: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$

Kombination mit Whg. mit Anordnung: N^n

Kombination mit Whg. ohne Anordnung: $\binom{N+n-1}{n}$

Multiple Choice Fragen

zu Kapitel 1

1) Welcher Ausdruck ist äquivalent zu $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$ und was muss für die Parameter a und b gelten?

☐ A) ;　　☐ B) — ;　　☐ C) – – ;

2) Welchen Ausdruck erhält man, indem man den Nenner von $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{8}}$ rational macht?

☐ A) –　　☐ B) –　　☐ C) –

3) Welcher Ausdruck ist äquivalent zu $\sqrt[3]{4x\sqrt[4]{16x^8}}$?

☐ A) – –　　☐ B)　　☐ C)

zu Kapitel 2

1) Für welche Werte von k ∈ ℝ besitzt die Gleichung $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = 2k$ genau eine Lösung?

☐ A)　　☐ B)　　☐ C)

2) An welchen Stellen nimmt die Funktion – den Wert Null an?

☐ A)　　☐ B)　　☐ C)

3) Wie lauten die reellen Nullstellen des Polynoms $x^6 - 2x^5 + 8x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 18x$, wenn eine der Nullstellen $x_1 = 2$ ist?

☐ A) L = {–1; 0; 1; 2} ☐ B) L = {–1; 2} ☐ C) L = {–1; 0; 1}

zu Kapitel 3

1) Eine Aktie wurde an einem Montag für 39,40 € gekauft. 3 Tage später notiert sie an der Börse mit 40,70 €. Um wie viel Prozent ist der Aktienkurs gestiegen?
Wieder 2 Tage später steht der Aktienkurs bei 37 €. Wie viel Prozent liegt dieser Wert unter dem Wochenhöchstwert von 40,70 €?

☐ A) 3% und 9% ☐ B) 3,3% und 7,8% ☐ C) 3,3% und 9,1%

2) Galgenstrix hat am 15.10.2013 bei der Schweizer Bank seines Vertrauens einen fixen Betrag exponentiell angelegt und fuhr am 31. Dezember 2013 frohen Mutes wieder in die Schweiz, um sein Erspartes abzuheben. Wie viele Zinstage hat ihm die Bank gut geschrieben, wenn der Zeitraum nach der englischen Methode gezählt wurde?

☐ A) 77 Tage ☐ B) 75 Tage ☐ C) 78 Tage

3) Asterix hat zu Jahresbeginn einen Betrag von 2.000 Sesterzen auf einer Bank eingezahlt und erhält nach 5 Jahren exponentieller (nachschüssiger) Verzinsung 2.583,10 Sesterzen. Mit wieviel Prozent wurde jährlich verzinst? Leiten Sie die hierfür benötigte Formel aus der Formel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ her.

☐ A) 5% p.a. ☐ B) 5,8% p.a. ☐ C) 5,25% p.a.

zu Kapitel 4

1) Was ergibt die Multiplikation der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

☐ A) $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ ☐ B) $x = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ☐ C) $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie die Inverse zu $\begin{pmatrix} 36 & -27 & -4 \\ -9 & 7 & 1 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ A) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ☐ B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

3) Majestix möchte sein Kapital in Höhe von 100.000 Sesterzen auf der Gallischen Bank anlegen. Da er konkrete Vorstellungen hat, setzt er sich mit dem zuständigen Fondsmanager zusammen und teilt diesem seine Forderungen mit: Es kommen drei Alternativen in Frage, wobei bei der ersten eine Rendite von 10%, bei der zweiten eine Rendite von 7% und bei der dritten Alternative eine Rendite von 8% erwartet wird. Das Kapital soll einen jährlichen Ertrag von 8.000 Sesterzen erzielen. Außerdem soll genau ein Drittel der insgesamt in die Fonds 2 und 3 fließenden Geldmenge in die erste Alternative investiert werden. Wie kann der Fondsmanager das Kapital unter Berücksichtigung dieser Forderungen auf die drei Fonds verteilen?

☐ A) Fond 1: 25 TStz, F2: 50 TStz, F3: 25 TStz
☐ B) Fond 1: 50 TStz, F2: 40 TStz, F3: 10 TStz
☐ C) Fond 1: 25 TStz, F2: 40 TStz, F3: 35 TStz

zu Kapitel 5

1) Führen Sie für $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ eine Kurvendiskussion durch (Bei der Bestimmung der Wendepunkte wird auf das hinreichende Kriterium $f'''(x) \neq 0$ verzichtet). Wie lautet das globale Minimum?

☐ A) T(–1; –0,5) ☐ B) T(1; 0,5) ☐ C) T(–1; –1)

2) Der Unternehmer Tischlerix stellt nur ein Produkt her. Für diesen ausgefallenen, aber äußerst praktischen Wohnzimmertisch gilt die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 2x^2 - 18x + 8$ und die Preis-Absatz-Funktion $p = 30 - 2x$. Bei welcher Produktmenge erwirtschaftet Tischlerix den maximalen Gewinn und wie hoch ist dieser Gewinn?

☐ A) 40 Tische, 20 Gewinn ☐ B) 24 Tische, 120 Gewinn ☐ C) 4 Tische, 120 Gewinn

3) Wie groß ist die Fläche unter der Funktion $f(x) = x$ im Intervall (-5; 3)?

☐ A) 17 ☐ B) -8 ☐ C) 8

zu Kapitel 6

1) Zockix war mit seiner neuen Freundin Flammine lecker essen und lässt den Abend nun im staatlichen Casino ausklingen. Um Flammine zu imponieren setzt er beim Französischen Roulette jeweils einen Jeton auf die Zahl 23 und die Zahl 8 (ihr Geburtsdatum). Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er in dieser Runde? [Hinweis: Im Roulette gibt es die Zahlen 1-36, jeweils zur Hälfte rot und zur Hälfte schwarz, sowie die grüne Zahl 0, welche alle mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen werden.]

☐ A) 5% ☐ B) 5,4% ☐ C) 5,56%

2) Flammine hat sich in der Zwischenzeit eine Tüte mit „Kaubonbons für Verliebte" gekauft, in welcher 5 gelbe, 7 orangene, 6 grüne und 2 tiefrote Herzbonbons sind. Sie greift ohne Hinzusehen hinein und holt sich 2 Bonbons heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt sie dabei genau eines der beiden tiefroten Herzbonbons?

☐ A) 5% ☐ B) 10% ☐ C) 18,95%

3) Blendix, welcher heute zum Zahnarzt muss, vergisst vor Aufregung die Zahlenkombination an seinem Fahrradschloss. Es handelt sich um ein herkömmliches, 4stelliges Zahlenschloss mit jeweils den Ziffern 0-9. Nach dem Zahnarztbesuch kann er sich wenigstens daran erinnern, dass die Kombination nur ungerade Zahlen enthält und die letzten beiden Ziffern gleich sind (aber von der ersten Ziffer verschieden). Wie viele Möglichkeiten muss Blendix im schlimmsten Fall ausprobieren, bis er sein Fahrradschloss geöffnet hat?

☐ A) 625 ☐ B) 125 ☐ C) 100

Musterlösungen MC Fragen

zu Kapitel 1

1) Welcher Ausdruck ist äquivalent zu $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ und was muss für die Parameter a und b gelten?

☐ A) ; ☐ B) — ; ☐ C) – – ;

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$$

Da nicht durch 0 dividiert werden darf, muss $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\neq 0$ gelten und damit $\sqrt[3]{a}\neq\sqrt[3]{b}$ bzw. $a\neq b$.

Antwort C)

2) Welchen Ausdruck erhält man, indem man den Nenner von $\dfrac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{8}}$ rational macht?

☐ A) – ☐ B) – ☐ C) –

Den Nenner rational machen bedeutet, den Bruch so umzuformen, dass im Nenner eine rationale Zahl steht.

$$\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(3-\sqrt{8})}{(3+\sqrt{8})\cdot(3-\sqrt{8})}=\frac{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}{(9-8)}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2\cdot 8}}{1}=3\sqrt{2}-\sqrt{16}=3\sqrt{2}-4$$

Antwort A)

3) Welcher Ausdruck ist äquivalent zu $\sqrt[3]{4x\sqrt[4]{16x^8}}$?

☐ A) – – ☐ B) ☐ C)

$$\sqrt[3]{4x\sqrt[4]{16x^8}}=\sqrt[3]{4x\cdot\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{x^8}}=\sqrt[3]{4x\cdot 2\cdot x^{\frac{8}{4}}}=\sqrt[3]{8x\cdot x^2}=\sqrt[3]{8x^3}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{x^3}=2\cdot x^{\frac{3}{3}}=2x$$

Antwort C)

zu Kapitel 2

1) Für welche Werte von k $\in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $\frac{x^2-2x+2}{x-1}=2k$ genau eine Lösung?

☐ A) ☐ B) ☐ C)

Da durch 0 nicht geteilt werden darf, gilt x – 1 ≠ 0 und damit x ≠ 1, also gilt für den Definitionsbereich D:
D = $\mathbb{R}$ \ {1}
Auflösen der Gleichung nach x ergibt:

$x^2-2x+2=2k\cdot(x-1)$

$x^2-2x+2=2kx-2k$

$x^2-2x-2kx+2+2k=0$

$x^2-(2+2k)x+(2+2k)=0$ mit a = 1 b = 2 + 2k c = 2 + 2k

Genau eine Lösung ergibt sich, wenn für die Diskriminante D = 0 gilt.

$D=b^2-4ac=(2+2k)^2-4\cdot1\cdot(2+2k)$

Also $(2+2k)^2-4\cdot1\cdot(2+2k)=0$

Nach k auflösen ergibt (1. Binomische Formel):

$4+8k+4k^2-8-8k=0$

$4k^2-4=0$

$4k^2=4$

$k^2=1$

$k_{1/2}=\sqrt{1}=\pm1$

Antwort C)

2) An welchen Stellen nimmt die Funktion – den Wert Null an?

☐ A) ☐ B) ☐ C)

–

Mitternachtsformel

–

– –

und und damit Antwort B)

3) Wie lauten die reellen Nullstellen des Polynoms $x^6 - 2x^5 + 8x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 18x$, wenn eine der Nullstellen $x_1 = 2$ ist?

☐ A) L = {–1; 0; 1; 2}   ☐ B) L = {–1; 2}   ☐ C) L = {–1; 0; 1}

Gesucht sind die Lösungen für x der folgenden Gleichung:

$$x^6 - 2x^5 + 8x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 18x = 0$$

Eine Lösung ist angegeben: $x_1 = 2$

Ausklammern von x liefert:

$$x \cdot (x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 9x + 18) = 0$$

Ein Produkt ist gleich 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, also $x_2 = 0$ oder

$$x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 9x + 18 = 0$$

Durchführen einer Polynomdivision mit der bekannten Nullstelle (x – 2) ergibt:

$$\begin{array}{l}
(x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 9x + 18) : (x-2) = x^4 + 8x^2 - 9 \\
\underline{-(x^5 - 2x^4)} \\
\qquad 0 \; + 8x^3 - 16x^2 \\
\qquad \underline{-(8x^3 - 16x^2)} \\
\qquad\qquad 0 \; - 9x + 18 \\
\qquad\qquad \underline{-(-9x + 18)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Also gilt $x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 9x + 18 = (x-2)(x^4 + 8x^2 - 9)$

D.h. $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

Substitution von $x^2 = u$ ergibt:

$$u^2 + 8u - 9 = 0$$

Einsetzen in die Mitternachtsformel:

$$u_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-9)}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}$$

$$u_1 = \frac{-8+10}{2} = 1 \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{-8-10}{2} = -9$$

Da $x^2 = u$ ergibt sich für x:

$x_{3/4} = \sqrt{1} = \pm 1$ und $x_{5/6} = \sqrt{-9}$, letztere haben jedoch keine reelle Lösung

Also ist die Menge aller reellen Nullstellen der Ausgangsgleichung gegeben durch L = {–1; 0; 1; 2}

Antwort A)

zu Kapitel 3

1) Eine Aktie wurde an einem Montag für 39,40 € gekauft. 3 Tage später notiert sie an der Börse mit 40,70 €. Um wie viel Prozent ist der Aktienkurs gestiegen?
Wieder 2 Tage später steht der Aktienkurs bei 37 €. Wie viel Prozent liegt dieser Wert unter dem Wochenhöchstwert von 40,70 €?

☐ A) 3% und 9% ☐ B) 3,3% und 7,8% ☐ C) 3,3% und 9,1%

Gegeben: G = 39,40 €
W = 40,80 € – 39,40 € = 1,30 € denn es interessiert nur der Gewinn.
Also gilt:

$$p = \frac{1{,}30}{39{,}40} \cdot 100 = 3{,}3$$

D.h. die Aktie ist um 3,3% gestiegen.
Gegeben: G = 40,70 €
W = 40,70 € – 37 € = 3,70 €
Also gilt:

$$p = \frac{3{,}70}{40{,}70} \cdot 100 = 9{,}1$$

D.h. die Aktie liegt 9,1% unter dem Wochenhöchstwert.
Antwort C)

2) Galgenstrix hat am 15.10.2013 bei der Schweizer Bank seines Vertrauens einen fixen Betrag exponentiell angelegt und fuhr am 31. Dezember 2013 frohen Mutes wieder in die Schweiz, um sein Erspartes abzuheben. Wie viele Zinstage hat ihm die Bank gut geschrieben, wenn der Zeitraum nach der englischen Methode gezählt wurde?

☐ A) 77 Tage ☐ B) 75 Tage ☐ C) 78 Tage

Tage zählen ergibt:
Oktober: 31-15=16
November: 30
Dezember: 31
in Summe: 77 Tage und damit —
Antwort A)

3) Asterix hat zu Jahresbeginn einen Betrag von 2.000 Sesterzen auf einer Bank eingezahlt und erhält nach 5 Jahren exponentieller (nachschüssiger) Verzinsung 2.583,10 Sesterzen. Mit wieviel Prozent wurde jährlich verzinst? Leiten Sie die hierfür benötigte Formel aus der Formel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ her.

☐ A) 5% p.a. ☐ B) 5,8% p.a. ☐ C) 5,25% p.a.

nach i auflösen:

Es wurde mit 5,25% jährlich verzinst, Anwort C)

zu Kapitel 4

1) Was ergibt die Multiplikation der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

☐ A) $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ ☐ B) $x = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ☐ C) $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Antwort B)

2) Bestimmen Sie die Inverse zu $\begin{pmatrix} 36 & -27 & -4 \\ -9 & 7 & 1 \\ -8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ A) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}$ ☐ B) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & 9 & 8\\ 4 & 7 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ☐ C) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 9\end{pmatrix}$

Gegeben: A

Gesucht: A^{-1}

Umformen der Matrix A, bis die Einheitsmatrix erzeugt ist. Zeitgleich werden die Operationen mit der Einheitsmatrix durchgeführt und rechts von der Matrix A notiert.

Ausgangslage:

$$\begin{pmatrix}36 & -27 & -4\\ -9 & 7 & 1\\ -8 & 6 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

Neue Zeile 3 = 2*Zeile 1 + 9*Zeile 3 ergibt:

$$\begin{pmatrix}36 & -27 & -4\\ -9 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}\right.$$

Neue Zeile 2 = Zeile 1 + 4*Zeile 2 ergibt:

$$\begin{pmatrix}36 & -27 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}\right.$$

Neue Zeile 1 = Zeile 1 + 4*Zeile 3:

$$\begin{pmatrix}36 & -27 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}9 & 0 & 36\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}\right.$$

Neue Zeile 1 = Zeile 1 + 27*Zeile 2:

$$\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}36 & 108 & 36\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}\right.$$

Division der Zeile 1 durch 36 ergibt:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}\right.$$

Und damit ist $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{pmatrix}$ die Inverse zu A.

Antwort A)

3) Majestix möchte sein Kapital in Höhe von 100.000 Sesterzen auf der Gallischen Bank anlegen. Da er konkrete Vorstellungen hat, setzt er sich mit dem zuständigen Fondsmanager zusammen und teilt diesem seine Forderungen mit: Es kommen drei Alternativen in Frage, wobei bei der ersten eine Rendite von 10%, bei der zweiten eine Rendite von 7% und bei der dritten Alternative eine Rendite von 8% erwartet wird. Das Kapital soll einen jährlichen Ertrag von 8.000 Sesterzen erzielen. Außerdem soll genau ein Drittel der insgesamt in die Fonds 2 und 3 fließenden Geldmenge in die erste Alternative investiert werden. Wie kann der Fondsmanager das Kapital unter Berücksichtigung dieser Forderungen auf die drei Fonds verteilen?

☐ A) Fond 1: 25 TStz, F2: 50 TStz, F3: 25 TStz
☐ B) Fond 1: 50 TStz, F2: 40 TStz, F3: 10 TStz
☐ C) Fond 1: 25 TStz, F2: 40 TStz, F3: 35 TStz

Gegeben: A, b
Gesucht: x
Sei x_i der Geldbetrag, der in die drei verschiedenen Alternativen i = 1, 2, 3 investiert wird. Dann lassen sich die oben getroffenen Aussagen wie folgt in die mathematische Schreibweise übersetzen:
Gleichung 1:

„Majestix möchte sein Kapital in Höhe von 100.000 Sesterzen auf der Gallischen Bank anlegen.“ bedeutet übersetzt in die Mathematik:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100.000$$

Gleichung 2:

„Es kommen drei Alternativen in Frage, wobei bei der ersten eine Rendite von 10%, bei der zweiten eine Rendite von 7% und bei der dritten Alternative eine Rendite von 8% erwartet wird. Das Kapital soll einen jährlichen Ertrag von 8.000 Sesterzen erzielen.“ bedeutet:

$$0{,}10 \cdot x_1 + 0{,}07 \cdot x_2 + 0{,}08 \cdot x_3 = 8.000$$

Gleichung 3:

„Außerdem soll genau ein Drittel der insgesamt in die Fonds 2 und 3 fließenden Geldmenge in die erste Alternative investiert werden.“ bedeutet:

$$\frac{1}{3} \cdot (x_2 + x_3) = x_1$$

Äquivalentes Umformen der 3. Gleichung ergibt:

$$-x_1 + \frac{1}{3} \cdot x_2 + \frac{1}{3} \cdot x_3 = 0$$

Hieraus lässt sich das folgende lineare Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}10 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}07 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}08 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot x_3 = \begin{pmatrix} 100.000 \\ 8.000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auflösen anhand des Gauß-Algorithmus ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100.000 \\ 0{,}10 & 0{,}07 & 0{,}08 & 8.000 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Addition ergibt neue Zeile 3 = Zeile 1 + Zeile 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100.000 \\ 0{,}10 & 0{,}07 & 0{,}08 & 8.000 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 100.000 \end{array}\right)$$

Multiplikation der Zeile 3 mit 3 ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100.000 \\ 0{,}10 & 0{,}07 & 0{,}08 & 8.000 \\ 0 & 4 & 4 & 300.000 \end{array}\right)$$

Multiplikation Zeile 2 mit –10 und Addition zu Zeile 1 ergibt für Zeile 2 neu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100.000 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 20.000 \\ 0 & 4 & 4 & 300.000 \end{array}\right)$$

Multiplikation der Zeile 2 mit 10 ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100.000 \\ 0 & 3 & 2 & 200.000 \\ 0 & 4 & 4 & 300.000 \end{array}\right)$$

Zeile 3 neu = 4 * Zeile 2 – 3 * Zeile 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100.000 \\ 0 & 3 & 2 & 200.000 \\ 0 & 0 & -4 & -100.000 \end{array}\right)$$

Aus Gleichung 3 folgt:

$$-4x_3 = -100.000 \Leftrightarrow x_3 = 25.000$$

Einsetzen in Gleichung 2 ergibt:

$$3x_2 + 2x_3 = 200.000 \Leftrightarrow 3x_2 + 2 \cdot 25.000 = 200.000 \Leftrightarrow 3x_2 = 150.000 \Leftrightarrow x_2 = 50.000$$

Einsetzen in Gleichung 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100.000 \Leftrightarrow x_1 + 50.000 + 25.000 = 100.000 \Leftrightarrow x_1 = 25.000$$

Also $x_3 = 25.000$, $x_2 = 50.000$, $x_1 = 25.000$, d.h.:

25 TStz werden in Fond 1, 50 TStz in Fond 2 und 25 TStz in Fond 3 angelegt.

Antwort A)

zu Kapitel 5

1) Führen Sie für $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ eine Kurvendiskussion durch (Bei der Bestimmung der Wendepunkte wird auf das hinreichende Kriterium $f'''(x) \neq 0$ verzichtet). Wie lautet das globale Minimum?

☐ A) T(–1; –0,5) ☐ B) T(1; 0,5) ☐ C) T(–1; –1)

Gegeben: f(x)

Gesucht: Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Eigenschaften

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Definitionsbereich:

$$x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$$

Das ist aber für alle x erfüllt, also ist der Definitionsbereich nicht eingeschränkt: x $\in$ ℝ.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (-x^2+1) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2+1) - (-x^2+1) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x \cdot (x^2+1) - 4x \cdot (-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

Auf die Berechnung von $f'''(x)$ kann laut Aufgabenstellung verzichtet werden.

Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Also N(0; 0) ist die einzige Nullstelle.

Extrema:

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

$$f''(x_1) = \frac{2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)}{((-1)^2+1)^3} = 0{,}5 > 0$$

Also für $x_1 = -1$ Tiefpunkt.

$$f''(x_1) = \frac{2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1}{(1^2+1)^3} = -0{,}5 < 0$$

Also für x_2= 1 Hochpunkt.

Einsetzen der Werte in f(x):

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -0{,}5$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = 0{,}5$$

Also Extrema: Tiefpunkt T(–1; –0,5) und Hochpunkt H(1; 0,5).

Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x^2 - 6) = 0$$

Also $x_3 = 0$ oder $2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_4 = -\sqrt{3};\; x_5 = \sqrt{3}$

Einsetzen in f(x) ergibt:

$$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$$

Also $W_1(0;0)$, identisch mit Nullstelle.

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{-\sqrt{3}}{4} \approx -0{,}433$$

Also $W_2(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4})$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}433$$

Also $W_3(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4})$

Krümmung:

$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$ ist in den Intervallen $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ und $(\sqrt{3}; \infty)$ zu untersuchen:

Die Funktion ist konvex für x $\in$ $(-\sqrt{3}; 0)$ und x $\in$ $(\sqrt{3}; \infty)$.

Die Funktion ist konkav für x $\in$ $(-\infty; -\sqrt{3})$ und x $\in$ $(0; \sqrt{3})$.

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

Also ist f(x) punktsymmetrisch zum Ursprung.

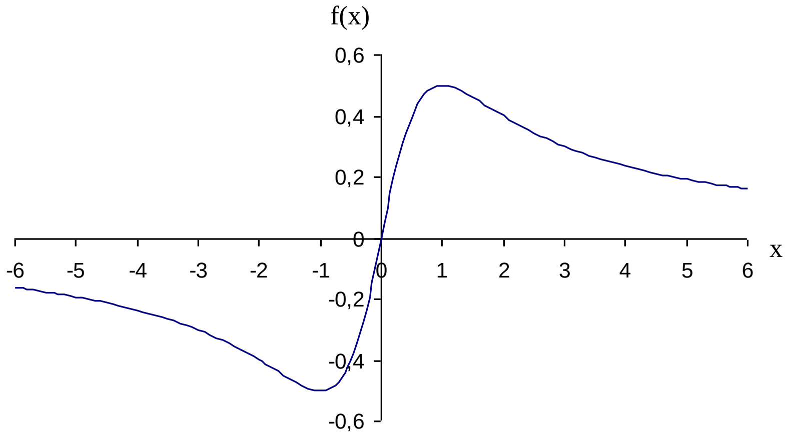
Asymptoten:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Also ist die x-Achse waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$

Der berechnete Tiefpunkt ist (wie aus dem Schaubild ersichtlich) ein globales Minimum.



Antwort A)

2) Der Unternehmer Tischlerix stellt nur ein Produkt her. Für diesen ausgefallenen, aber äußerst praktischen Wohnzimmertisch gilt die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 2x^2 - 18x + 8$ und die Preis-Absatz-Funktion $p = 30 - 2x$. Bei welcher Produktmenge erwirtschaftet Tischlerix den maximalen Gewinn und wie hoch ist dieser Gewinn?

☐ A) 40 Tische, 20 Gewinn ☐ B) 24 Tische, 120 Gewinn ☐ C) 4 Tische, 120 Gewinn

Gegeben: K(x), p

Gesucht: G(x), x für G(x) maximal, G_{max}

Der Umsatz berechnet sich aus Preis p mal Menge x, also:

$U(x) = p \cdot x = (30 - 2x) \cdot x = 30x - 2x^2$

Der Gewinn berechnet sich aus Umsatz abzüglich der Kosten:

$G(x) = U(x) - K(x) = 30x - 2x^2 - (x^3 - 2x^2 - 18x + 8) = 30x - 2x^2 - x^3 + 2x^2 + 18x - 8 = -x^3 + 48x - 8$

Also ergibt sich als Gewinnfunktion:

$G(x) = -x^3 + 48x - 8$

Gesucht ist der maximale Gewinn und damit das Maximum der Funktion; dies erhält man via $G'(x) = 0$:

$G'(x) = -3x^2 + 48 = 0 \Leftrightarrow -3x^2 = -48 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$

Da eine Produktion von –4 Tischen nicht möglich ist, gilt $x_1 = 4$.

$G''(x) = -6x \Leftrightarrow G''(4) = -6 \cdot 4 = -24 < 0$ und damit liegt ein Maximum bei x = 4 vor.

Einsetzen in G(x) ergibt:

$G(4) = -4^3 + 48 \cdot 4 - 8 = 120$

D.h. Tischlerix erwirtschaftet bei der Produktion von 4 Tischen einen maximalen Gewinn in Höhe von 120 Sesterzen.

Antwort C)

3) Wie groß ist die Fläche unter der Funktion $f(x) = x$ im Intervall (-5; 3)?

☐ A) 17 ☐ B) -8 ☐ C) 8

Gegeben: f

Gesucht: $\int f$

Untersuchung auf Nullstellen im Bereich (-5; 3):

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

D.h. die Funktion besitzt eine Nullstelle im Punkt N(0; 0) und damit setzt sich die Fläche aus den beiden Teilflächen links und rechts der Nullstelle zusammen:

$$\int_{-5}^{3} f(x)\,dx = \int_{-5}^{3} x\,dx = \left|\int_{-5}^{0} x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3} x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-5}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3}\right| = \left|\frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{2}(-5)^2\right| + \left|\frac{1}{2}3^2 - \frac{1}{2}0^2\right|$$

$$= |-12{,}5| + |4{,}5| = 12{,}5 + 4{,}5 = 17$$

Antwort A)

zu Kapitel 6

1) Zockix war mit seiner neuen Freundin Flammine lecker essen und lässt den Abend nun im staatlichen Casino ausklingen. Um Flammine zu imponieren setzt er beim Französischen Roulette jeweils einen Jeton auf die Zahl 23 und die Zahl 8 (ihr Geburtsdatum). Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er in dieser Runde? [Hinweis: Im Roulette gibt es die Zahlen 1-36, jeweils zur Hälfte rot und zur Hälfte schwarz, sowie die grüne Zahl 0, welche alle mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen werden.]

☐ A) 5% ☐ B) 5,4% ☐ C) 5,56%

$$P(23;8) = \frac{2}{37} = 0{,}054 = 5{,}4\%$$

Antwort B)

2) Flammine hat sich in der Zwischenzeit eine Tüte mit „Kaubonbons für Verliebte“ gekauft, in welcher 5 gelbe, 7 orangene, 6 grüne und 2 tiefrote Herzbonbons sind. Sie greift ohne Hinzusehen hinein und holt

sich 2 Bonbons heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt sie dabei genau eines der beiden tiefroten Herzbonbons?

☐ A) 5% ☐ B) 10% ☐ C) 18,95%

Anzahl aller Möglichkeiten: $\binom{20}{2} = 190$

Anzahl der Treffer genau 1: $\binom{2}{1} \cdot \binom{18}{1} = 2 \cdot 18 = 36$

$P(1\,rotes) = \frac{36}{190} = 0{,}1895 = 18{,}95\%$

Antwort C)

3) Blendix, welcher heute zum Zahnarzt muss, vergisst vor Aufregung die Zahlenkombination an seinem Fahrradschloss. Es handelt sich um ein herkömmliches, 4stelliges Zahlenschloss mit jeweils den Ziffern 0-9. Nach dem Zahnarztbesuch kann er sich wenigstens daran erinnern, dass die Kombination nur ungerade Zahlen enthält und die letzten beiden Ziffern gleich sind (aber von der ersten Ziffer verschieden). Wie viele Möglichkeiten muss Blendix im schlimmsten Fall ausprobieren, bis er sein Fahrradschloss geöffnet hat?

☐ A) 625 ☐ B) 125 ☐ C) 100

nur ungerade: 5 Zahlen, also

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 100$

Antwort C)

Wiederholungsfragen

Kapitel 1

- Aufgabe/Fallstudie -

Der Ausdruck $\frac{9}{\sqrt{2}-1}-\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ist mittels Termumformungen so weit wie möglich zu vereinfachen.

- Musterlösung -

$$\frac{9}{\sqrt{2}-1}-\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{9\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)}-\frac{(4-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{9\cdot\sqrt{2}+9}{(2-1)}-\frac{4\cdot\sqrt{2}-2}{2}=\frac{9\cdot\sqrt{2}+9}{1}-(2\cdot\sqrt{2}-1)$$

$$=9\cdot\sqrt{2}+9-2\cdot\sqrt{2}+1=9\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}+1+9=7\sqrt{2}+10$$

- Aufgabe/Fallstudie -

Lösen Sie nach n auf.

- Musterlösung -

Kapitel 2

- Aufgabe/Fallstudie -

Wie lauten die Lösungen für die Gleichung $2x^2-16x+24=0$ mittels des Satzes von Vieta?

- Musterlösung -

Der Satz von Vieta ist nur auf die Normalform anwendbar, also wird die Gleichung durch 2 geteilt:

$x^2-8x+12=0$, also ergibt sich für p = –8 und für q = 12.

1. Schritt: Aus welchen Zahlen könnte das Produkt $x_1\cdot x_2=q$ gebildet werden?

$x_1\cdot x_2=12$ gilt für: $1\cdot 12$; $(-1)\cdot(-12)$; $2\cdot 6$; $(-2)\cdot(-6)$; $3\cdot 4$; $(-3)\cdot(-4)$;

2. Schritt: Aus welcher dieser Zahlenkombinationen kann man die Summe $x_1 + x_2 = -p$ bilden?

$x_1 + x_2 = 8$ gilt nur für: $2 + 6 = 8$

3. Schritt: Zerlegung des Quadratterms in Linearfaktoren.

$(x-2)(x-6) = 0$

$x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ und damit L = {2; 6}

- Aufgabe/Fallstudie -

Wie lauten die Lösungen für die Gleichung $f(x) = x^2 - 428x + 42.660 = 0$?

- Musterlösung -

$f(x) = x^2 - 428x + 42.660 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-(-428) \pm \sqrt{428^2 - 4 \cdot 1 \cdot 42.660}}{2 \cdot 1} = \frac{428 \pm 112}{2}$$

$x_1 = 158$ $x_2 = 270$

Kapitel 3

- Aufgabe/Fallstudie -

Die Sparkasse Gallien bietet die Sparform Zuwachssparen mit steigendem Zins an, bei der man im ersten Jahr 4% p.a., im zweiten Jahr 4,5% p.a. und im dritten Jahr 5,5% p.a. Zinsen bekommt. Dagegen erhält man bei der Römer Bank Sparbriefe mit 4,6% p.a. bei einer Laufzeit von drei Jahren. Welches der beiden Angebote ist ertragsreicher, wenn man von der ggf. unterschiedlichen Verfügbarkeit absieht?

- Musterlösung -

Gegeben: i_1 = 0,04, i_2 = 0,045, i_3 = 0,055, $i_{Röm}$ = 0,047, $n_{Röm}$ = 3

Gesucht: K_n bei Anlage Sparkasse Gallien, K_n bei Anlage Römer Bank

Sparkasse Gallien:

$K_n = K_0 \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) = K_0 \cdot (1+0{,}04) \cdot (1+0{,}045) \cdot (1+0{,}055) \approx 1{,}1466 \cdot K_0$

Römer Bank:

$K_n = K_0 \cdot (1+i_{Röm})^{n_{Röm}} = K_0 \cdot (1+0{,}046)^3 \approx 1{,}1444 \cdot K_0$

Vergleich:

$1{,}1466 \cdot K_0 > 1{,}1444 \cdot K_0$

Das Angebot der Sparkasse Gallien ist ertragsreicher.

- Aufgabe/Fallstudie -

Mit welchem jährlichen Prozentsatz muss das Anfangskapital eines Sparbuches exponentiell verzinst werden, wenn man nach 12 Jahren dreimal so viel Geld abheben möchte? Leiten Sie die hierfür benötigte Formel aus der Formel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ her.

- Musterlösung -

$$\frac{K_n}{K_0} = \cdot(1+i)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1+i$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$i = \sqrt[12]{\frac{3}{1}} - 1 = 0{,}0959 = 9{,}59\%$$

Kapitel 4

- Aufgabe/Fallstudie -

Wie lautet der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$?

- Musterlösung -

Zieht man von der Zeile 1 die 3. Zeile ab, erhält man eine neue 3. Zeile (der Rest verändert sich nicht):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Addieren der 1. und 4. Zeile ergibt für die 4. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition der Zeilen 2 und 3 ergibt für die 3. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der Zeile 2 mit $\frac{1}{2}$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es können keine weiteren Einheitsvektoren erzeugt werden, so dass sich für den Rang der Matrix 2 ergibt.

- Aufgabe/Fallstudie -

Wie lautet die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ transponierte Matrix A^T ?

- Musterlösung -

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Kapitel 5

- Aufgabe/Fallstudie -

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$, $x > -3$ die Schnittstellen mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie f(x) auf Extrem- und Wendepunkte.

Stellen Sie die Funktion im Intervall $(-3; 5]$ grafisch dar.

- Musterlösung -

Gegeben: f(x)

Gesucht: Schnittstellen mit y-Achse, Schnittstellen mit x-Achse (=Nullstellen), f'(x), f''(x), f'''(x), Asymptoten, Grafik

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$$

Nullstellen für f(x) = 0:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

Also hat die Funktion die Nullstellen $N_1(-2; 0)$ und $N_2(2; 0)$.

Schnittpunkte mit y-Achse für f(0):

$$f(0) = \frac{0^2-4}{0+3} = -\frac{4}{3} \approx -1{,}33 \qquad \text{also Schnittpunkt bei Y(0; –1,33)}$$

Extrema für f'(x)=0:

$$f'(x) = \frac{2x(x+3)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-x^2+4}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+6x+4=0$$

Einsetzen in Mitternachtsformel ergibt:

$$x_{1/2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{4\cdot 5}}{2} = \frac{-6\pm 2\sqrt{5}}{2} = -3\pm\sqrt{5}$$

Da $x_1 = -3-\sqrt{5}$ nicht definiert ist, gilt nur $x_2 = -3+\sqrt{5} \approx -0{,}76$

$$f''(x) = \frac{(2x+6)\cdot(x+3)^2-(x^2+6x+4)\cdot 2\cdot(x+3)\cdot 1}{(x+3)^4}$$

$$= \frac{(2x+6)\cdot(x+3)-(x^2+6x+4)\cdot 2}{(x+3)^3} = \frac{2x^2+6x+6x+18-2x^2-12x-8}{(x+3)^3} = \frac{10}{(x+3)^3}$$

Einsetzen von x_2 ergibt:

$$f''(-3+\sqrt{5}) = \frac{10}{(-3+\sqrt{5}+3)^3} = \frac{10}{(\sqrt{5})^3} = \frac{10}{(\sqrt{5})^3} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$$

Also Tiefpunkt bei x_2 mit Wert:

$$f(-3+\sqrt{5}) = \frac{(-3+\sqrt{5})^2-4}{-3+\sqrt{5}+3} = \frac{9-6\sqrt{5}+5-4}{\sqrt{5}} = \frac{10-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

Rationalmachen des Nenners ergibt:

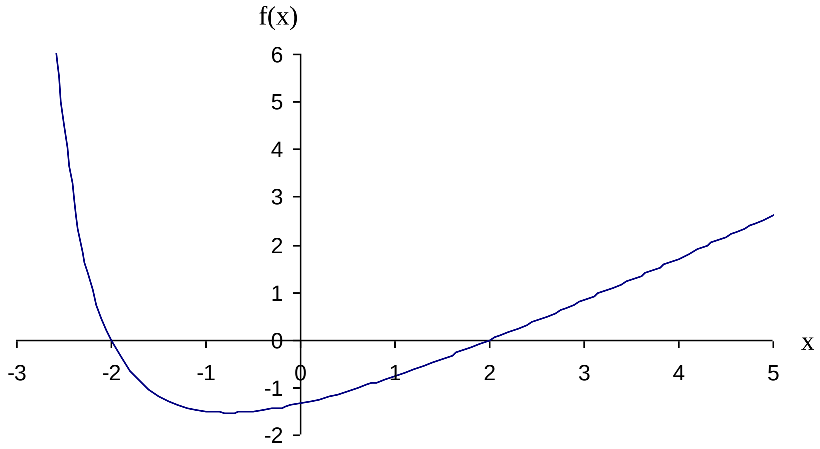
$$f(-3+\sqrt{5}) = \frac{10-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\cdot\sqrt{5}-6\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{10\cdot\sqrt{5}-6\cdot 5}{5} = 2\sqrt{5}-6$$

Und damit den Tiefpunkt $T(-3+\sqrt{5};\ 2\sqrt{5}-6)$, also ca. T(–0,76 ; –1,53)

Wendepunkte für f''(x) = 0 und f'''(x) ≠ 0:

$$f''(x) = \frac{10}{(x+3)^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{(x+3)^3} = 0 \Leftrightarrow 10 = 0 \qquad \textit{falsch}\text{, also existieren keine Wendepunkte.}$$

Grafik:



- Aufgabe/Fallstudie -

Bestimmen Sie die Fläche zwischen den Kurven $f(x) = x^2 + 2x + 2$ und $g(x) = -2x^2 + 20x - 10$.

- Musterlösung -

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = -2x^2 + 20x - 10$

Gesucht:

Schnittpunkte von f(x) und g(x) und $\int (g(x) - f(x))\, dx$

Um die Grenzen für das Integral zu erhalten, sind zunächst die Schnittpunkte der beiden Funktionen zu bestimmen. Hierfür werden die f(x) und g(x) gleichgesetzt:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = -2x^2 + 20x - 10$

Auflösen nach x ergibt:

$x^2 + 2x + 2 + 2x^2 - 20x + 10 = 0$

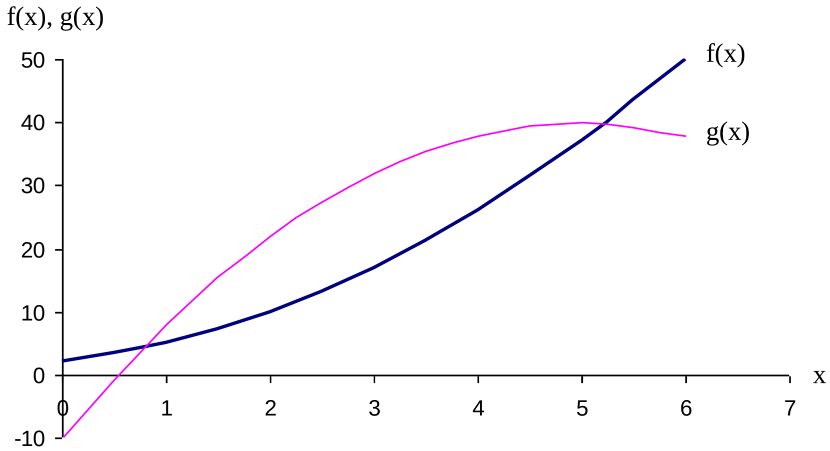
$\Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{18 \pm \sqrt{180}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36 \cdot 5}}{6} = \frac{18 \pm 6\sqrt{5}}{6} = \frac{6 \cdot (3 \pm \sqrt{5})}{6} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$\Leftrightarrow x_1 = 3 - \sqrt{5} \approx 0{,}76$ und $x_2 = 3 + \sqrt{5} \approx 5{,}24$

Das heißt, das Integral ist in diesen Grenzen zu berechnen.

Zur Verdeutlichung können beide Funktionen in ein Achsenkreuz eingezeichnet werden:



Da $g(x) \geq f(x)$ im Intervall $[x_1; x_2]$, ist die Fläche folgendermaßen zu berechnen:

$$\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{x_1}^{x_2} (-2x^2 + 20x - 10 - (x^2 + 2x + 2))\, dx = \int_{x_1}^{x_2} (-2x^2 + 20x - 10 - x^2 - 2x - 2)\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (-3x^2 + 18x - 12)\, dx = \left[-x^3 + 9x^2 - 12x\right]_{x_1}^{x_2} = \left[-x^3 + 9x^2 - 12x\right]_{3-\sqrt{5}}^{3+\sqrt{5}}$$

$$= \left(-(3+\sqrt{5})^3 + 9 \cdot (3+\sqrt{5})^2 - 12 \cdot (3+\sqrt{5})\right) - \left(-(3-\sqrt{5})^3 + 9 \cdot (3-\sqrt{5})^2 - 12 \cdot (3-\sqrt{5})\right)$$

$$\approx 40{,}36 - (-4{,}36) = 44{,}72$$

Die Fläche beträgt 44,72.

Kapitel 6

- Aufgabe/Fallstudie -

In der Kabine Ihrer Last-Minute-Kreuzfahrt haben Sie Ihren Reisepass in den kleinen Schranktresor eingeschlossen. Leider können Sie sich am Abend nach dem Captain's Dinner nicht mehr an den von Ihnen vergebenen Zahlen-Code erinnern. Sie wissen lediglich, dass Sie eine Kombination von 5 Ziffern, jeweils von 0-9, vergeben haben, dass die Zahlen nebeneinander nicht die gleichen waren und dass die Zahlen symmetrisch um die dritte Zahl angeordnet waren. D.h. die fünfte Ziffer entspricht der ersten Ziffer und die 4. Ziffer der zweiten. Wie viele Versuche benötigen Sie maximal, um den Tresor zu öffnen?

- Musterlösung -

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 = 720$$

- Aufgabe/Fallstudie -

Elisa, die Herzensdame von Mozartix, nascht genüsslich aus einer Tüte Gummibärchen. Als Mozartix ebenfalls in die Tüte greifen möchte, sind dort nur noch 3 weiße, 4 gelbe, 2 orangene, 5 rote und 4 grüne

Bärchen enthalten. Er greift ohne Hinzusehen hinein und holt sich 3 Gummibärchen heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt er dabei mindestens 2 grüne Gummibärchen?

- Musterlösung -

Anzahl aller Möglichkeiten: $\binom{18}{3} = 816$

Anzahl der Treffer genau 2: $\binom{4}{2} \cdot \binom{14}{1} = 6 \cdot 14 = 84$

Anzahl der Treffer genau 3: $\binom{4}{3} \cdot \binom{14}{0} = 4 \cdot 1 = 4$

Anzahl der Treffer gesamt = 84+4=88

$$P(\text{min. } 2\ \textit{grüne}) = \frac{84+4}{816} = 0{,}1078$$

Mit 10,78%.