P 35 Eigenschaften von Folgen

Gib jeweils die ersten 5 Glieder der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ an und entscheide ob die Folge (streng) monoton oder alternierend (*) und ggf. beschränkt ist. Gib den Grenzwert an, falls die Folge konvergiert also für $n \to \infty$ gegen einen festen Wert geht.

a) $a_n = n \cdot (-1)^n$

b) $a_n = 5 - \dfrac{1}{n}$

c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4}i\right) \cdot a_n$

d) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(\dfrac{a_n}{2}\right)^2$

e) ** $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1} + a_n}{2}$

f) $a_0 = 1,\ a_n = \sqrt{n + \sqrt{a_{n-1}}}$

g) $a_0 = 1,\ a_n = \sqrt{\dfrac{\sqrt{n} + a_{n-1}}{\sqrt{n}}}$

* alternierend bedeutet im weiteren Sinn, dass die Folge um einen Grenzwert oszilliert.
** Optionale Aufgabe.

P 36 vollständige Induktion

Beweise durch vollständige Induktion dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n > n_0$ geeignet!

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2 \Rightarrow a_n = 3^{n-1} + 1$

c) Für alle geraden n ist $n(n+2)$ durch 8 teilbar.

P 37 Reihen

Überprüfen Sie, ob folgende Reihen konvergieren:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k - \frac{1}{2}}$

e) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n-1}}$