

P 54 Grundintegrale

Bestimmen Sie die folgenden Grundintegrale:

a) $\int x^3 + x^2 + 1 \, dx$ und $\int_1^2 x^3 + x^2 + 1 \, dx$

b) $\int e^x + \frac{1}{x} \, dx$ und $\int_1^2 e^x + \frac{1}{x} \, dx$

c) $\int \sin x + \sqrt{x^3} \, dx$ und $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x + \sqrt{x^3} \, dx$

P 55 Partielle Integration

Bestimmen Sie folgende Integrale mit partieller Integration:

(a) : $\int x \cdot \sin x \, dx$, (b) : $\int x^2 \cdot e^x \, dx$, (c) : $\int \sin x \cdot e^x \, dx$

P 56 Substitution

Berechne das Integral mit Hilfe geeigneter Substitution:

(a) : $\int (3x + 5)^3 \, dx$, (b) : $\int_0^1 \frac{t}{(1 + t^2)^2} \, dt$, (c) : $\int 2xe^{x^2} \, dx$

P 57 Partialbruchzerlegung

Integrieren Sie mithilfe der Partialbruchzerlegung:

a) „Einfache“ Partialbruchzerlegung

$$I = \int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} \, dx$$

b) Unecht gebrochen rationale Funktion

$$I = \int \frac{x^3 - 5x^2 + x + 4}{x^2 - 7x + 10} \, dx$$

▷ Zerlege zunächst die Funktion in ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion und zerlege dann den echt gebrochen rationalen Teil in Partialbrüche. Berechne dann $\int f(x) \, dx$.

c) Komplexe Nennernullstelle

$$I = \int \frac{dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Integrationsregeln im Überblick

- Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx \\ &= f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx \\ \int u' \cdot v \, dx &= u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx\end{aligned}$$

- Integration durch Substitution

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

- Logarithmische Integration

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C \quad (f(x) \neq 0)$$

- Regel X: Nachschauen in einer Integraltafel!

- Tabelle von Ableitungs- und Stammfunktionen
- Formelsammlung Mathematik: Unbestimmte Integrale rationaler Funktionen
- Lists of integrals
- Table of Integrals

- Partialbruchzerlegung: Ist keine Integrationsregel, sondern eine Technik, um gebrochen rationale Funktionen in Teilfunktionen (Partialbrüche) zu zerlegen, die man dann mit der Integraltafel oder den obigen Regeln integrieren kann.

Dr. Hempel / Mathematische Grundlagen - Das unbestimmte Integral Eicher: Partialbruchzerlegung

P 58 Abschnittsweise Integration

Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \left| \frac{(\ln(x))^3}{x} \right|$

a) Gib den maximalen Definitionsbereich von $f(x)$ an und formuliere die Funktion abschnittsweise ohne Betragsstriche.

b) Berechne mit Hilfe von a) das Integral $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) \, dx$.