P 49 Ableitungsregeln

Bestimme die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln — beachte, dass man gegebenenfalls auch mehrere Regeln anwenden muss!

a) $x(t) = \cot(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$.

b) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{2x}$.

c) $f(x) = e^{x^3+2x^2+3}$.

d) $f(x) = \dfrac{\cos(x^2+3)}{e^x + \sin(x-5)}$.

e) $f(x) = e^{\frac{x^2+5}{x^3-x}}$.

f) $x(t) = e^{-t^2} \cdot \ln(t^3+1)$.

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}$, $a \in \mathbb{R}$ konstant.

P 50 Eine Funktion unter der Lupe

Betrachte die Funktion $f(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

a) Gib Definitionsbereich und Wertebereich an.

b) Zeige, dass die Funktion auf Ihrem Definitionsbereich stetig und differenzierbar ist.

▷ Warum genügt es, nur die Differenzierbarkeit zu zeigen?

▷ Zeige, dass die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ ist.

▷ **Tipp:** Gehe analog zu Beweis der Ableitung der Tangensfunktion aus der Vorlesung vor. Additionstheorem für den Kotangens: $\cot(x+y) = \dfrac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}$. **Trick:** Multipliziere an geeigneter Stelle Zähler und Nenner mit $\sin^2(x)$ und verwende $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin(x)} = 1$.

c) Betrachte $f(x)$ auf dem Intervall $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ und Begründe die folgenden Aussagen:

- $f(x)$ ist auf I streng monoton fallend.
- $f(x)$ ist auf I beschränkt.
- $f(x)$ nimmt auf I ein absolutes Minimum bzw. Maximum an.
- $f(x)$ besitzt auf I eine Nullstelle.
- $f(x)$ besitzt auf I keine lokalen Extrema.

d) Skizziere den Graphen von $f(x)$ auf I.

P 51 Extremwert

Paula und ihre kleine Schwester Jule fahren Bobby-Car. Zu beginn befinden sie sich an den Punkten A (Paula) und B (Jule) im Abstand $a = 10m$. Dann fährt Paula mit der Geschwindigkeit $v_P = 1\,\frac{m}{s}$ direkt auf Jule zu und Jule flieht mit der Geschwindigkeit $v_J = 0.5\,\frac{m}{s}$ in einem Winkel von $\alpha = 90°$.

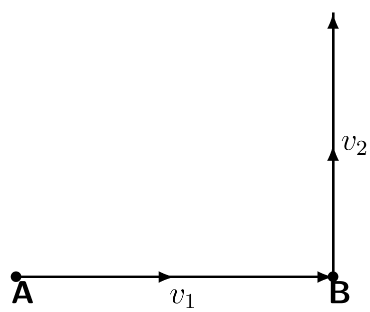
Paula hat sich vorgenommen Jule im optimalen Zeitpunkt mit einer Wasserbombe zu bewerfen. Der optimale Zeitpunkt ist dann gegeben, wenn die beiden den geringsten Abstand voneinander haben.

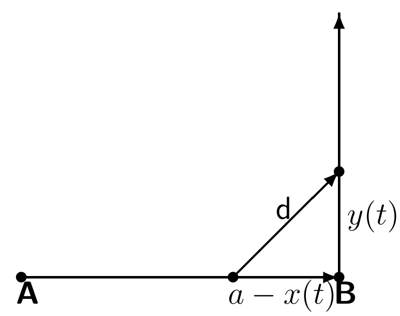
$x(t)$ bezeichne den Weg den Paula bis zum Zeitpunkt t zurückgelegt hat und $y(t)$ den Weg den Jule bis zum Zeitpunkt t zurückgelegt hat. Diese beiden Wege müssen in Abhängigkeit von v_P, v_J und t ausgedrückt werden.

a) Bestimme eine Gleichung für das Quadrat des Abstands $d^2(t)$ der beiden zu einem beliebigen Zeitpunkt t.

b) Bestimme das globale Minimum der Funktion $f(t) = d^2(t)$ auf dem Intervall $[0, \infty]$.

c) Was kann man aus b) schließen?





P 52 Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 10x^2 \cdot \ln|x|$.

a) Bestimme den Definitionsbereich.

b) Bestimme die Symmetrieeigenschaften der Funktion.

c) Gibt es Polstellen?

d) Bestimme die Nullstellen und falls vorhanden die Schnittpunkte mit der y-Achse.

e) Bestimme die Ableitungen bis zur dritten Ordnung.

f) Untersuche die Funktion auf lokale Extrema, Wendepunkte und Sattelpunkte.

g) Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$?

h) Bestimme den minimalen Wertebereich der Funktion.

i) Skizziere den Graphen der Funktion.

Ableitungsregeln im Überblick

- Linearität = Faktorregel + Summenregel

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x) \quad \text{und} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- Potenzregel

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \begin{cases} n > 1 \\ n = 1 \wedge x \neq 0 & \text{sonst } 0^0 \\ n < 0 \wedge x \neq 0 & \text{sonst } \frac{1}{0} \end{cases}$$

- Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'.(x)$$

▷ Leibniz-Regel — Höhere Ableitungen eines Produkts

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

- Quotientenregel ($g(x) \neq 0$)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

- Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x)) = \big(f' \circ g\big)(x)$$

▷ Formel von Faà di Bruno - Kettenregel für höhere Ableitungen ...

▷ Reziprokenregel: Folgt aus Quotienten- oder Kettenregel ($f(x) \neq 0$)

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

▷ Umkehrregel — Ableitung der Umkehrfunktion: Folgt ebenfalls aus Kettenregel

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \begin{cases} f \text{ in } x \text{ differenzierbar} \\ f(x) \neq 0 \\ f^{-1} \text{ in } x \text{ differenzierbar} \end{cases}$$

▷ Logarithmische Ableitung: Auch aus Kettenregel

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad f(x) \neq 0,\ f(x) > 0$$

▷ Ableitung der Potenzfunktion: Aus Ketten- und Produktregel

$$f(x) = g(x)^{h(x)} = \exp\left(h(x) \cdot \ln(g(x))\right)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \left(h'(x)\ln(g(x)) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right) g(x)^{h(x)}.$$

- Implizite Differentiation folgt aus der mehrdimensionalen Kettenregel → 2-tes Semester ...

$$F\left(x, f\left(x\right)\right) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\, f' = F_x + F_y\, f'\,.$$