P 20 LGS mit drei Variablen Lösen Sie das LGS mithilfe des Gaußalgorithmus

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 1 & I \\ x & - & y & - & z & = & 5 & II \\ 2x & + & 3y & + & z & = & -1 & III \end{array}$$

P 21 Verknüpfungen von Vektoren

In dieser Aufgabe bezeichnen „$\cdot$“ das Skalar- und „$\times$“ das Vektorprodukt zweier Vektoren.

a) Welche der folgenden Ausdrücke sind für zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ definiert?

$$(a1)\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}, \quad (a2)\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}, \quad (a3)\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}, \quad (a4)\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$$

b) Berechne diejenigen Ausdrücke aus Aufgabenteil a), die definiert sind, für $\mathbf{a} = (1, -2, 1)^t$ und $\mathbf{b} = (0, 1, 2)^t$.

P 22 Punkt- und Richtungsvektor

Gegeben sind der Punkt $P(2|0|-4)$ und der Vektor $\overline{PQ} = (-2, 4, 6)^t$.
Welche Koordinaten haben der Punkt Q und der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$?

P 23 Skalarprodukt — Projektion

Wie lautet der Projektionsvektor der senkrechten Projektion des Vektors $\mathbf{a} = (2, 5, 1)^t$ auf den Vektor $\mathbf{b} = (6, 8, 0)^t$?

P 24 Kreuzprodukt

Berechnen Sie $(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$ für $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

P 25 Orthogonale Vektoren

Welche Vektoren sind senkrecht zu $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und besitzen die Länge 2?

P 26 Spatprodukt — Komplanarität

Überprüfe mittels Berechnung des Spatprodukts, ob die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ in einer Ebene liegen (komplanar sind)!

$$\mathbf{a} = (3, 2, -1)^t, \ \mathbf{b} = (-3, -4, 2)^t, \ \mathbf{c} = (12, 6, -3)$$

P 27 Geraden

Gegeben seien die beiden Geraden $\quad g_1 : \ \mathbf{p} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \quad$ und $\quad g_2 : \ \mathbf{p} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Für welche Werte des Parameters k schließen die beiden Geraden g_1 und g_2 einen Winkel von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ein?

b) Welchen gemeinsamen Punkt haben die beiden Geraden?

P 28 Ebene und Punkt

Gegeben sei die Ebene $E_1 : \ 2x - y + 3z = 1$.
Bestimme k so, dass der Punkt $P(-1|k|1)$ in der Ebene E_1 liegt.