Mathematik 1

für Wirtschaftsingenieure

J. Hechler, A. Thümmel

Hochschule Darmstadt

WS 23/24

Inhalte

Folgende Inhalte stehen im Studienplan:

- Zahlenarten (einschließlich komplexer Zahlen und deren Grundrechenarten)

Inhalte

Folgende Inhalte stehen im Studienplan:

- Zahlenarten (einschließlich komplexer Zahlen und deren Grundrechenarten)
- Lineare Algebra (lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, Vektoren, Anwendungen der Vektorrechnung)

Inhalte

Folgende Inhalte stehen im Studienplan:

- Zahlenarten (einschließlich komplexer Zahlen und deren Grundrechenarten)
- Lineare Algebra (lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, Vektoren, Anwendungen der Vektorrechnung)
- Folgen, Reihen mitsamt prakt. Verwendung

Inhalte

- Funktionen (Funktionsbegriff einschließlich Umkehrfunktionen, Funktionen reeller und komplexer Veränderlichen, insbesondere rationale, Wurzel-, Exponential-, trigonometrische und hyperbolische Funktionen und deren Umkehrfunktionen, Anwendungen in Wirtschaft und Technik)

Inhalte

- Funktionen (Funktionsbegriff einschließlich Umkehrfunktionen, Funktionen reeller und komplexer Veränderlichen, insbesondere rationale, Wurzel-, Exponential-, trigonometrische und hyperbolische Funktionen und deren Umkehrfunktionen, Anwendungen in Wirtschaft und Technik)
- Differentialrechnung (Grenzwerte, Ableitung, Technik des Differenzierens, Anwendung der Differentialrechnung)

Inhalte

- Funktionen (Funktionsbegriff einschließlich Umkehrfunktionen, Funktionen reeller und komplexer Veränderlichen, insbesondere rationale, Wurzel-, Exponential-, trigonometrische und hyperbolische Funktionen und deren Umkehrfunktionen, Anwendungen in Wirtschaft und Technik)
- Differentialrechnung (Grenzwerte, Ableitung, Technik des Differenzierens, Anwendung der Differentialrechnung)
- Integralrechnung (bestimmtes und unbestimmtes Integral, Technik des Integrieren, uneigentliches Integral, Anwendungen der Integralrechnung)

Literatur

- Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 2. Auflage, Werner Helm, Andreas Pfeifer und Joachim Ohser , Verlag: Carl Hanser, September 2015.
  - PDF kann in der hda Bibliothek heruntergeladen werden: `https://pica1l.ulb.tu-darmstadt.de/`
  - Ein Ausdruck ist in der Vorlesung nicht zugelassen.
- Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, Otto Forster, Verlag: Vieweg+Teubner Verlag, Januar 2008.
- ...

PVL und Klausur

- Übungen:
  - Übungsblätter erscheinen alle 2 Wochen.
  - In der ersten Übung werden Übungen vom Tutor vorgerechnet.
  - In jeder zweiten Übung werden Übungen von Studenten vorgerechnet.
- PVL:
  - Mindestens 67% der Hausaufgabenpunkte.
  - Mindestens 2 Aufgaben in einer Übung vorrechnen.
- Klausur:
  - Die Klausur wird für beide Zügen identisch sein.
  - Nur vollständige und nachvollziehbare Lösungswege können eine volle Punktzahl erhalten!!!

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

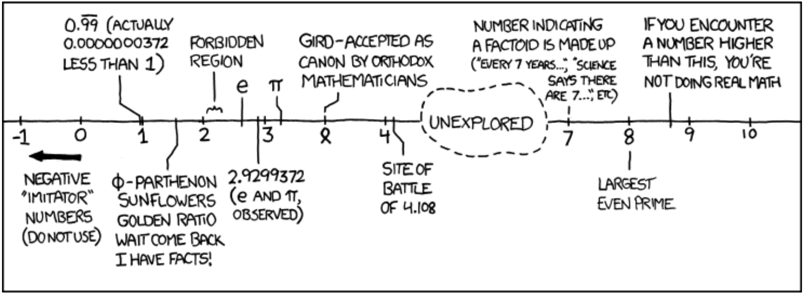
7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Zahlenmengen



(Quelle: xkcd.com)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{N} \ = \{ \quad 1, 2, \dots \}$ - Menge der natürlichen Zahlen.
  Zulässige Operationen sind die Addition und die Multiplikation, d.h. die Menge ist bezüglich der Addition oder Multiplikation abgeschlossen.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen.
  Zulässige Operationen sind die Addition und die Multiplikation, d.h. die Menge ist bezüglich der Addition oder Multiplikation abgeschlossen.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen.
Zulässige Operationen sind die Addition und die Multiplikation, d.h. die Menge ist bezüglich der Addition oder Multiplikation abgeschlossen.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - Menge der ganzen Zahlen.
Zulässige Operationen sind Addition, Subtraktion und Multiplikation.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen. Zulässige Operationen sind die Addition und die Multiplikation, d.h. die Menge ist bezüglich der Addition oder Multiplikation abgeschlossen.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - Menge der ganzen Zahlen. Zulässige Operationen sind Addition, Subtraktion und Multiplikation.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ - Menge der rationalen Zahlen. Zulässig sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Beispiele

Example (Zahlenmengen)

Zu welchen Mengen gehören die folgenden Zahlen:

a.) $4,1$

b.) 2

c.) $-3,5$

d.) $\sqrt[3]{27}$

e.) $\frac{1}{3}$

f.) $0,\overline{3}$

g.) $\frac{-2}{11} = -0,\overline{18}$

h.) Die Zahl der Produkte, die eine Fabrik an einem bestimmten Tag herstellt.

Gibt es weitere Zahlenmengen?

- Zu welcher Zahlenmenge gehört π?

Gibt es weitere Zahlenmengen?

- Zu welcher Zahlenmenge gehört π?
- Die Zahl π ist keine rationale Zahl, denn sie kann nur als Grenzwert einer Reihe von rationalen Zahlen

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

dargestellt werden.

Gibt es weitere Zahlenmengen?

- Zu welcher Zahlenmenge gehört π?
- Die Zahl π ist keine rationale Zahl, denn sie kann nur als Grenzwert einer Reihe von rationalen Zahlen

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

dargestellt werden.

Gibt es weitere Zahlenmengen?

- Zu welcher Zahlenmenge gehört π?
- Die Zahl π ist keine rationale Zahl, denn sie kann nur als Grenzwert einer Reihe von rationalen Zahlen

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

  dargestellt werden.
- Folglich gilt $\pi \notin \mathbb{Q}$

Gibt es weitere Zahlenmengen?

- Zu welcher Zahlenmenge gehört π?
- Die Zahl π ist keine rationale Zahl, denn sie kann nur als Grenzwert einer Reihe von rationalen Zahlen

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

  dargestellt werden.
- Folglich gilt $\pi \notin \mathbb{Q}$
- Es gibt eine Vielzahl weiterer Zahlen, die nicht rational sind: $e, \sqrt{2}, \ldots$.Diese werden irrationale Zahlen genannt.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Definition (Reelle Zahlen)

Die Vereinigung der Mengen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der irrationalen Zahlen, wird Menge der reellen Zahlen genannt und mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Definition (Reelle Zahlen)

Die Vereinigung der Mengen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der irrationalen Zahlen, wird Menge der reellen Zahlen genannt und mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Damit ist die Menge der irrationalen Zahlen durch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gegeben.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Definition (Reelle Zahlen)

Die Vereinigung der Mengen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der irrationalen Zahlen, wird Menge der reellen Zahlen genannt und mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Damit ist die Menge der irrationalen Zahlen durch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gegeben.

Definition (Komplexe Zahlen)

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Definition (Reelle Zahlen)

Die Vereinigung der Mengen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der irrationalen Zahlen, wird Menge der reellen Zahlen genannt und mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Damit ist die Menge der irrationalen Zahlen durch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gegeben.

Definition (Komplexe Zahlen)

später . . . siehe S. 33

Fakultät

Definition (Fakultät)

Die Fakultät einer Zahl n ist durch

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

definiert.

Fakultät

Definition (Fakultät)

Die Fakultät einer Zahl n ist durch

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

definiert.

Die Fakultät $n!$ kann auch mit Hilfe der Produktschreibweise

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

geschrieben werden.

Beispiele

Example (Fakultät)

Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus

a.) $2!$

b.) $6!$

c.) $(-3)!$

d.) $(0! + 0! + 0!)!$

e.) $\frac{19!}{18!}$

f.) Denken Sie sich eine weitere Aufgaben aus geben Sie sie ihrem Nachbarn.

Binomialkoeffizienten

Definition (Binomialkoeffizienten)

Seien k und n nicht negative ganze Zahlen für die $k \leq n$ gilt. Dann heißt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der Binomialkoeffzient "n über k".

Binomialkoeffizienten

Definition (Binomialkoeffizienten)

Seien k und n nicht negative ganze Zahlen für die $k \leq n$ gilt. Dann heißt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der Binomialkoeffzient "n über k".

Es gelten die folgenden Spezialfälle
$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$ und $\binom{n}{n} = 1$.

Beispiele

Example

a.) $\binom{9}{3} =$

b.) $\binom{6}{2} =$

c.) $\binom{99}{98} =$

Beispiele

Example

a.) $$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

b.) $$\binom{6}{2} =$$

c.) $$\binom{99}{98} =$$

Beispiele

Example

a.) $$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

b.) $$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$$

c.) $$\binom{99}{98} =$$

Beispiele

Example

a.) $$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

b.) $$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$$

c.) $$\binom{99}{98} = 99$$

Beispiele

Example

a.) $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$

b.) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$

c.) $\binom{99}{98} = 99$

d.) $\binom{49}{6} =$

Beispiele

Example

a.) $$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

b.) $$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$$

c.) $$\binom{99}{98} = 99$$

d.) $$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten

Es gilt stets

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

Rechnen mit dem Binomialkoeffizienten

Es gilt stets

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Example

Siehe Pascalsches Dreieck.

Binomische Formeln

Für zwei reelle Zahlen a und b gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Binomische Formeln

Für zwei reelle Zahlen a und b gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Binomische Formeln

Für zwei reelle Zahlen a und b gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

Die auftretenden Koeffizienten sind Binomialkoeffizienten.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Binomische Formeln

Alle drei Binomischen Formeln sind:

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Example

Effektives Rechnen von Potenzen

$$99^2$$

Binomische Formeln

Alle drei Binomischen Formeln sind:

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Example

Effektives Rechnen von Potenzen

$$99^2 = (100-1)^2$$

Binomische Formeln

Alle drei Binomischen Formeln sind:

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Example

Effektives Rechnen von Potenzen

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2$$

Binomische Formeln

Alle drei Binomischen Formeln sind:

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Example

Effektives Rechnen von Potenzen

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 9801$$

Binomische Formeln

Alle drei Binomischen Formeln sind:

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Example

Effektives Rechnen von Potenzen

$$\begin{aligned} 99^2 &= (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 9801 \\ 37^2 &= ? \\ (a+ab)(a-ab) &= ? \end{aligned}$$

Potenzen und Logarithmen

Definition (Potenz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann heißt a^b die "b-tePotenz von a" oder "a hoch b".

Potenzen und Logarithmen

Definition (Potenz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann heißt a^b die “b-tePotenz von a” oder “a hoch b”.

Es gilt $a^0 = 1$ und $0^a = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und für $a \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ mal}}, a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Potenzen und Logarithmen

Definition (Potenz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann heißt a^b die "b-tePotenz von a" oder "a hoch b".

Es gilt $a^0 = 1$ und $0^a = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und für $a \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}, a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Definition (Logarithmus)

Seien $a, c \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, dann heißt

$$\log_a c$$

der "Logarithmus der Zahl c zur Basis a".

Potenzen und Logarithmen (Gesetze)

Grundsätzlich gilt die Beziehung:

$$b = \log_a c \Leftrightarrow c = a^b$$

Example (Logarithmus)

- $\log_2 1024 = 10$ denn $2^{10} = 1024$
- $\log_{10} 100 = 2$ denn $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$
- $\log_e 10 = \ln 10 = 2,302585$

Potenzen und Logarithmen (Gesetze)

Folgenden Gesetze gelten bei Potenzen und Logarithmus

- $a^b a^c = a^{b+c}$ und $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

Potenzen und Logarithmen (Gesetze)

Folgenden Gesetze gelten bei Potenzen und Logarithmus

- $a^b a^c = a^{b+c}$ und $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

Basiswechsel

- $a^c = b^{c \cdot \log_b a}$
- $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$

Potenzen und Logarithmen (Beispiel)

Example (Beispiel)

Berechnen Sie:

$$\sqrt[50]{9801^{100}} =$$

Potenzen und Logarithmen (Beispiel)

Example (Beispiel)

Berechnen Sie:

$$\begin{aligned} \sqrt[50]{9801^{100}} &= 9801^{100\cdot\frac{1}{50}} \\ &= \end{aligned}$$

Potenzen und Logarithmen (Beispiel)

Example (Beispiel)

Berechnen Sie:

$$\begin{aligned} \sqrt[50]{9801^{100}} &= 9801^{100\cdot\frac{1}{50}} \\ &= 9801^{2} \\ &= \end{aligned}$$

Potenzen und Logarithmen (Beispiel)

Example (Beispiel)

Berechnen Sie:

$$\begin{aligned}\sqrt[50]{9801^{100}} &= 9801^{100\cdot\frac{1}{50}}\\ &= 9801^2\\ &= 96059601\end{aligned}$$

Eine direkte Berechnung mit dem Taschenrechner scheitert im Normalfall.

Absolutbetrag und Signum

Definition (Absolutbetrag)

Der Absolutbetrag $|x|$ einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x. & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Definition (Signum)

Das Signum (Vorzeichen) einer reellen Zahl x ist gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}, \text{ für } x \neq 0, \ \operatorname{sgn}(0) = 0.$$

Rechnen mit Beträgen

Für das Rechnen mit Beträgen gelten die folgenden Regeln:

- $|x| \geq 0$

Rechnen mit Beträgen

Für das Rechnen mit Beträgen gelten die folgenden Regeln:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$

Rechnen mit Beträgen

Für das Rechnen mit Beträgen gelten die folgenden Regeln:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Rechnen mit Beträgen

Für das Rechnen mit Beträgen gelten die folgenden Regeln:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ oder $x \geq a$

Rechnen mit Beträgen

Für das Rechnen mit Beträgen gelten die folgenden Regeln:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ oder $x \geq a$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Rechnen mit Beträgen

Für das Rechnen mit Beträgen gelten die folgenden Regeln:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ oder $x \geq a$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

Lösen quadratischer Gleichungen

Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ und gesucht ein $x \in \mathbb{R}$ für das

$$x^2 + px + q = 0$$

gilt.

Lösen quadratischer Gleichungen

Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ und gesucht ein $x \in \mathbb{R}$ für das

$$x^2 + px + q = 0$$

gilt.
Als Lösung erhält man

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Es gilt $x \in \mathbb{R}$ g.d.w $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ gilt.

Regeln für Ungleichungen

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $a < b \Rightarrow ac < bc, \text{ für } c > 0$
- $a < b \Rightarrow ac > bc, \text{ für } c < 0$
- $a < b, 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$
- $a < b \Rightarrow -a > -b$
- $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ oder $a = b$

Beispiele

Example

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf

- $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}$
- $\frac{x-1}{x+2} \geq 3$
- $18x^2 - 3x = 10$
- $x^2 + x - 4 = 2$

Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die auf der Zahlengeraden durch zwei Randpunkte a und b mit $a \leq b$ begrenzt wird, heißt (beschränktes) Intervall.

Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die auf der Zahlengeraden durch zwei Randpunkte a und b mit $a \leq b$ begrenzt wird, heißt (beschränktes) Intervall.

- Abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die auf der Zahlengeraden durch zwei Randpunkte a und b mit $a \leq b$ begrenzt wird, heißt (beschränktes) Intervall.

- Abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall: $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die auf der Zahlengeraden durch zwei Randpunkte a und b mit $a \leq b$ begrenzt wird, heißt (beschränktes) Intervall.

- Abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall: $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Rechtsoffen $I = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die auf der Zahlengeraden durch zwei Randpunkte a und b mit $a \leq b$ begrenzt wird, heißt (beschränktes) Intervall.

- Abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall: $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Rechtsoffen $I = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Linksoffen $I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die auf der Zahlengeraden durch zwei Randpunkte a und b mit $a \leq b$ begrenzt wird, heißt (beschränktes) Intervall.

- Abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offenes Intervall: $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Rechtsoffen $I = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Linksoffen $I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

Variante für die Handschrift: man schreibt auch umgedrehte eckige Klammern statt runde, Bsp.: $]a, b[$ für (a, b).

Unbeschränkte Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die höchstens von einem Randpunkt begrenzt wird heißt unbeschränktes Intervall.

Unbeschränkte Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die höchstens von einem Randpunkt begrenzt wird heißt unbeschränktes Intervall.

- $I = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

Unbeschränkte Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die höchstens von einem Randpunkt begrenzt wird heißt unbeschränktes Intervall.

- $I = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$
- $I = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$

Unbeschränkte Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die höchstens von einem Randpunkt begrenzt wird heißt unbeschränktes Intervall.

- $I = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$
- $I = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$
- $I = (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$

Unbeschränkte Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die höchstens von einem Randpunkt begrenzt wird heißt unbeschränktes Intervall.

- $I = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$
- $I = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$
- $I = (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$
- $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Unbeschränkte Intervalle

Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die höchstens von einem Randpunkt begrenzt wird heißt unbeschränktes Intervall.

- $I = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$
- $I = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$
- $I = (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$
- $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Example (Intervalle)

Was ist der Unterschied zwischen $[1, 2]$ und $\{1; 2\}$?

Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion zum Beweis einer Aussage:

(i) Induktionsanfang: Die zu beweisende Aussage ist für $n_0 = 1$ richtig.

(ii) Induktionsannahme: Es wird angenommen, dass die Aussage für $n_k = k$ richtig ist.

(iii) Induktionsschluss: Wenn die Aussage für $n_k = k$ richtig ist, dann ist sie auch für $n_{k+1} = k + 1$ richtig.

Die Aussage ist für alle natürlichen Zahlen gültig, wenn zunächst (i) bewiesen wird und unter Verwendung der Annahme (ii) auch die Behauptung (iii) gezeigt werden kann.

Vollständige Induktion - Beispiel

Example

Vollständige Induktion Beweisen Sie dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

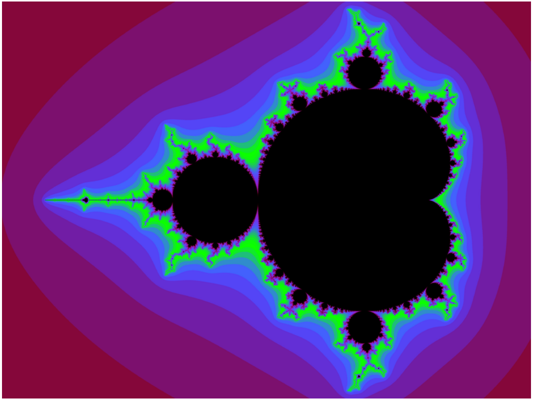
7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Komplexe Zahlenebene



(Quelle: wikipedia.org)

Farbig kodierte Anzahl der Iteration $x_{n+1} = x_n^2 + c$ bis $|x| \geq 10^3$ gilt.

Motivation komplexer Zahlen

Ziel ist es die Basisoperationen für komplexe Zahlen zu lernen.
Typische Aufgaben:

- Sei $z_1 = 1 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 6\mathrm{i}$, berechne $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1 + \overline{z_1}$, $z_1 \cdot \overline{z_1}$.

Motivation komplexer Zahlen

Ziel ist es die Basisoperationen für komplexe Zahlen zu lernen.
Typische Aufgaben:

- Sei $z_1 = 1 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 6\mathrm{i}$, berechne $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1 + \overline{z_1}$, $z_1 \cdot \overline{z_1}$.
- Wie ist die kartesische Darstellung von $z = 4e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$?

Motivation komplexer Zahlen

Ziel ist es die Basisoperationen für komplexe Zahlen zu lernen.
Typische Aufgaben:

- Sei $z_1 = 1 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 6\mathrm{i}$, berechne $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1 + \overline{z_1}$, $z_1 \cdot \overline{z_1}$.
- Wie ist die kartesische Darstellung von $z = 4e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$?
- Wie ist die exponentielle Darstellung von $z = 1 + \mathrm{i}$?

Motivation komplexer Zahlen

Ziel ist es die Basisoperationen für komplexe Zahlen zu lernen.
Typische Aufgaben:

- Sei $z_1 = 1 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 6\mathrm{i}$, berechne $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1 + \overline{z_1}$, $z_1 \cdot \overline{z_1}$.
- Wie ist die kartesische Darstellung von $z = 4e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$?
- Wie ist die exponentielle Darstellung von $z = 1 + \mathrm{i}$?
- Wie ist die trigonometrische Darstellung von $z = 1 + \mathrm{i}$?

Motivation komplexer Zahlen

Ziel ist es die Basisoperationen für komplexe Zahlen zu lernen.
Typische Aufgaben:

- Sei $z_1 = 1 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 6\mathrm{i}$, berechne $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1 + \overline{z_1}$, $z_1 \cdot \overline{z_1}$.
- Wie ist die kartesische Darstellung von $z = 4e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$?
- Wie ist die exponentielle Darstellung von $z = 1 + \mathrm{i}$?
- Wie ist die trigonometrische Darstellung von $z = 1 + \mathrm{i}$?
- Geben Sie die n-ten Wurzeln von $z = 8\mathrm{i}$ an $(n = 3)$ und stellen Sie diese in der Gaußchen Zahlenebene dar.

Motivation komplexer Zahlen

Ziel ist es die Basisoperationen für komplexe Zahlen zu lernen.
Typische Aufgaben:

- Sei $z_1 = 1 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 6\mathrm{i}$, berechne $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1 + \overline{z_1}$, $z_1 \cdot \overline{z_1}$.
- Wie ist die kartesische Darstellung von $z = 4e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$?
- Wie ist die exponentielle Darstellung von $z = 1 + \mathrm{i}$?
- Wie ist die trigonometrische Darstellung von $z = 1 + \mathrm{i}$?
- Geben Sie die n-ten Wurzeln von $z = 8\mathrm{i}$ an $(n = 3)$ und stellen Sie diese in der Gaußchen Zahlenebene dar.
- Beweisen Sie $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Definition kopmlexer Zahlen

Definition ($\mathbb{C}$)

Unter einer komplexen Zahl z versteht man die Summe einer reellen Zahl a und einem Vielfachen $b\mathrm{i}$ der imaginären Einheit $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$,

$$z = a + b\mathrm{i}$$

Die Menge der komplexen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{z = a + b\mathrm{i} \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Der Realteil von z wird mit $\mathrm{Re}(z) = a$ bezeichnet. Der Imaginärteil von z mit $\mathrm{Im}(z) = b$ bezeichnet.

Definition kopmlexer Zahlen

Definition ($\mathbb{C}$)

Unter einer komplexen Zahl z versteht man die Summe einer reellen Zahl a und einem Vielfachen $b\mathrm{i}$ der imaginären Einheit $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$,

$$z = a + b\mathrm{i}$$

Die Menge der komplexen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{z = a + b\mathrm{i} \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Der Realteil von z wird mit $\mathrm{Re}(z) = a$ bezeichnet. Der Imaginärteil von z mit $\mathrm{Im}(z) = b$ bezeichnet.

Offensichtlich ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, denn jede reelle Zahl ist auch ein komplexe Zahl mit $b = 0$.

Beispiele

Example

$$x^2 + 9 = 0$$

Beispiele

Example

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9 &= 0 \\
x^2 &= -9
\end{aligned}
$$

Beispiele

Example

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9 &= 0 \\
x^2 &= -9 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{-9}
\end{aligned}
$$

Beispiele

Example

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9 &= 0 \\
x^2 &= -9 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{-9} \\
x_{1/2} &= \pm 3\sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

Beispiele

Example

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9 &= 0 \\
x^2 &= -9 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{-9} \\
x_{1/2} &= \pm 3\sqrt{-1} \\
x_1 &= 3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Beispiele

Example

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9 &= 0 \\
x^2 &= -9 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{-9} \\
x_{1/2} &= \pm 3\sqrt{-1} \\
x_1 &= 3\mathrm{i} \\
x_2 &= -3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Beispiele

Example

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9 &= 0 \\
x^2 &= -9 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{-9} \\
x_{1/2} &= \pm 3\sqrt{-1} \\
x_1 &= 3\mathrm{i} \\
x_2 &= -3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{Re}(x_1) = 0$
- $\mathrm{Im}(x_1) = 3$

Beispiele

Example

Lösen Sie:

$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

Beispiele

Example

Lösen Sie:

$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

Lösung

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 24}$$

Beispiele

Example

Lösen Sie:

$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

Lösung

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 24} \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{-8} \end{aligned}$$

Beispiele

Example

Lösen Sie:

$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

Lösung

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 24} \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{-8} \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{8} \end{aligned}$$

Beispiele

Example

Lösen Sie:

$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

Lösung

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16-24} \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{-8} \\ x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{8} \\ x_1 &= 4 + \mathrm{i}\sqrt{8} \end{aligned}$$

Beispiele

Example

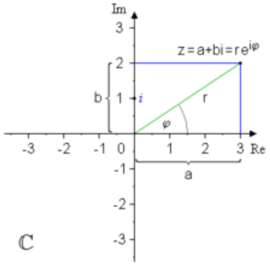
Lösen Sie:

$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

Lösung

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 24} \\
x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{-8} \\
x_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{8} \\
x_1 &= 4 + \mathrm{i}\sqrt{8} \\
x_2 &= 4 - \mathrm{i}\sqrt{8}
\end{aligned}$$

Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene



(Quelle: wikipedia.org)

Es gilt

$$z = \underbrace{a + bi}_{\textit{kartesisch}} = \underbrace{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}_{\textit{trigonometrisch}} = \underbrace{re^{\mathrm{i}\varphi}}_{\textit{exponentiell}} =: r\exp(\mathrm{i}\varphi)$$

Grundbegriffe

- Es gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$$

  heißen *gleich* g.d.w. $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ gilt.
- Die zu einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ gehörige Zahl

$$\overline{z} = a - b\mathrm{i}$$

  heißt die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.
- Der *Betrag* von $z = a + b\mathrm{i}$ ist definiert durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Grundbegriffe - Beispiel

Example

Berechnen Sie für $z_1 = 4 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = -3 - \mathrm{i}\sqrt{7}$:

a) $|z_1|$

b) $|z_2|$

c) $\overline{z_1}$

d) $\overline{z_2}$

e) Gilt $z_1 = \overline{z_2}$?

Trigonometrische Form

Durch die Einführung von Polarkoordinaten $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$ mit $r = |z|$ und

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, & a > 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, & a < 0, b \in \mathbb{R} \\ \arctan\frac{b}{a} + 2\pi, & a > 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0 \\ 0, & a = b = 0 \end{cases}$$

kann die komplexe Zahl z auch durch $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dargestellt werden.

Exponentielle Form

Wegen der Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

ist die trigonometrische Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ von z identisch mit

$$z = re^{i\varphi}.$$

Exponentielle Form

Wegen der Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

ist die trigonometrische Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ von z identisch mit

$$z = re^{i\varphi}.$$

Es gilt

$$e^{i\varphi} = e^{i\varphi + 2\pi i k}.$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$z = a + bi = -\sqrt{3} - i$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\
r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi = -\sqrt{3} - i \\
r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2
\end{aligned}
$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$
\begin{aligned}
z &= a + b\mathrm{i} = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\
r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2 \\
\varphi &= \arctan\frac{b}{a} + \pi
\end{aligned}
$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$\begin{aligned} z &= a + b\mathrm{i} = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\ r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2 \\ \varphi &= \arctan\frac{b}{a} + \pi = \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{7}{6}\pi \end{aligned}$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$\begin{aligned}
z &= a + b\mathrm{i} = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\
r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2 \\
\varphi &= \arctan\frac{b}{a} + \pi = \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{7}{6}\pi \\
\Rightarrow z &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)
\end{aligned}$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$\begin{aligned}
z &= a + b\mathrm{i} = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\
r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2 \\
\varphi &= \arctan\frac{b}{a} + \pi = \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{7}{6}\pi \\
\Rightarrow z &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\pi\right)
\end{aligned}$$

Kartesische in die trigonometrische oder exponentielle Form

Zu berechnen $a+bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, gesucht ist also r und φ.

Example

$$\begin{aligned}
z &= a+b\mathrm{i} = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\
r &= |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2 \\
\varphi &= \arctan\frac{b}{a} + \pi = \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{7}{6}\pi \\
\Rightarrow z &= r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\pi\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7}{6}\pi}
\end{aligned}$$

Exponentielle in die kartesische Form

Zu berechnen $re^{i\varphi} = a + bi$, gesucht ist also a und b.

Example

$$z = re^{i\varphi} = 3e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Exponentielle in die kartesische Form

Zu berechnen $re^{i\varphi} = a + bi$, gesucht ist also a und b.

Example

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} = 3e^{i\frac{3}{4}\pi} \\ &= 3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

Exponentielle in die kartesische Form

Zu berechnen $re^{\mathrm{i}\varphi} = a + b\mathrm{i}$, gesucht ist also a und b.

Example

$$
\begin{aligned}
z &= re^{\mathrm{i}\varphi} = 3e^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi} \\
&= 3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right) \\
&= 3\cos\frac{3}{4}\pi + 3\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

Exponentielle in die kartesische Form

Zu berechnen $re^{i\varphi} = a + bi$, gesucht ist also a und b.

Example

$$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} = 3e^{i\frac{3}{4}\pi} \\ &= 3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) \\ &= 3\cos\frac{3}{4}\pi + 3i\sin\frac{3}{4}\pi \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

Umwandlung - Beispiel

Example

Gegeben seien $z_1 = 4 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7}{8}\pi}$. Geben Sie

a) z_1 in trigonometrische Form

b) z_2 in kartesische Form

c) z_1 in exponentielle Form

an.

Addition und Subtraktion

Definition (Summe und Differenz)

Die *Summe* $z_1 + z_2$ und die *Differenz* $z_1 - z_2$ zweier komplexer Zahlen

$$z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1 \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$$

sind definiert durch

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2) \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + \mathrm{i}(b_1 - b_2) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion sind nur in kartesischer Form möglich. Liegt z in anderer Form vor muss z in kartesische Form umgewandelt werden.

Addition Subtraktion - Beispiel

Example

Berechnen Sie mit $z_1 = 4 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = 3 - \mathrm{i}$:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_2 + \overline{z_2}$

c) $z_1 - z_2$

d) $z_2 + z_1 - \overline{z_1} - z_2$

Multiplikation

Definition (Multiplikation)

Das *Produkt* $z_1 \cdot z_2$ zweier komplexer Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + \mathrm{i} b_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \\ z_2 &= a_2 + \mathrm{i} b_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

ist definiert durch

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + \mathrm{i}(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Multiplikation - Beispiel

Example

Berechnen Sie mit $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ und $z_2 = -1 + i$:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_1 \cdot \overline{z_1}$

c) $z_2 \cdot \overline{z_2}$

Multiplikation - Beispiel

Example

Berechnen Sie mit $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ und $z_2 = -1 + i$:

a) $z_1 \cdot z_2$
b) $z_1 \cdot \overline{z_1}$
c) $z_2 \cdot \overline{z_2}$

Theorem

Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt $z\overline{z} = |z|^2$.

Division

Definition (Division)

Der *Quotient* z_1/z_2 zweier Komplexer Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + \mathrm{i} b_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \\ z_2 &= a_2 + \mathrm{i} b_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} \end{aligned}$$

ist definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{i}\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division - Beispiel

Example

Berechnen Sie mit $z_1 = 4 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = 3 - \mathrm{i}$:

a) z_1 / z_2

b) $z_1 / \overline{z_1}$

Potenzieren und Wurzel

Definition (Potenzieren)

Die *Potenz* z^a einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$, die in trigonometrischer bzw. exponentieller Form gegeben sei, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, ist definiert durch

$$z^a = r^a(\cos(a\varphi) + \mathrm{i}\sin(a\varphi)) = r^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\varphi}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Potenzieren und Wurzel

Definition (Potenzieren)

Die *Potenz* z^a einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$, die in trigonometrischer bzw. exponentieller Form gegeben sei, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = re^{\mathrm{i}\varphi}$, ist definiert durch

$$z^a = r^a(\cos(a\varphi) + \mathrm{i}\sin(a\varphi)) = r^a e^{\mathrm{i}a\varphi}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Definition (Wurzel)

Die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{z}$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch die Menge aller Lösungen der Gleichung $x^n = z$, definiert durch

$$\sqrt[n]{z} = \{x \in \mathbb{C} : x^n = z\}, \quad z \in \mathbb{C}$$

n-te Einheitswurzel

Theorem

Die Gleichung $x^n = z$ besitzt für jede kopmlexe Zahl z genau n Lösungen. Die Lösungsmenge $\sqrt[n]{z}$ ist durch

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ x_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

gegeben.

n-te Einheitswurzel

Theorem

Die Gleichung $x^n = z$ besitzt für jede kopmlexe Zahl z genau n Lösungen. Die Lösungsmenge $\sqrt[n]{z}$ ist durch

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ x_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

gegeben.

Example

Geben Sie die n-ten Wurzeln von $z = 8\mathrm{i}$ an $(n = 3)$ und stellen Sie diese in der Gaußchen Zahlenebene dar.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Anwendung

Vektoren kommen in sehr vielen Bereichen im täglichen Leben vor:

- Navigationssystemen
- Raumnummern
- CAD Systemen
- Physik
- Farbe
- Lineare Gleichungssystem für die Berechnung von wirtschaftlichen Anlagen
- ...

Was ist ein Vektor?

Definition

Ein n-dimensionaler Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ist ein n-Tupel

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

mit $v_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die v_i sind die Koordinaten des Vektors v.

Schreibweise

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{oder } \vec{v} = (v_1, v_2, \dots v_n)^T$$

$(\cdot)^T$ steht für *transponiert*.

Beispiel Vektoren

Example

Beispiele für Vektoren

- $a = (2, 3)^T \in \mathbb{R}^2$ ist ein zweidimensionaler Vektor, also $a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $c = (1.5, 0, -2.6, 4, 5)^T \in \mathbb{R}^5$ ist ein fünfdimensionaler Vektor, also $c \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Ortsvektor

Jedem Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ entspricht ein Punkt P mit $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Der Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ wird als Pfeil dargestellt, der den Koordinatenursprung mit Punkt P verbindet.

Definition

Der Ortsvektor $0\vec{P} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Pfeil, der den Punkt $0 = (0, \ldots, 0) \in R^n$ mit dem Punkt $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ verbindet.

Beispiel

Example

Sei $A = (2,3)$ und $B = (-3,0)$, bestimmen Sie:

1) $\vec{0A}$
2) $\vec{0B}$
3) $\vec{AB}$

Beispiel

Example

Sei $A = (2, 3)$ und $B = (-3, 0)$, bestimmen Sie:

1) $0\vec{A}$
2) $0\vec{B}$
3) $A\vec{B}$

1 und 2 sind Ortsvektoren.

3 ist ein Richtungsvektor.

Addition von Vektoren

Definition

Sei $\vec{a} = (a_1, \ldots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{b} = (b_1, \ldots b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ definiert, durch

$$\vec{a} + \vec{b} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \ldots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Addition von Vektoren

Definition

Sei $\vec{a} = (a_1, \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{b} = (b_1, \dots b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ definiert, durch

$$\vec{a} + \vec{b} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Example

Berechnen Sie für $\vec{a} = (2, 3)^T$ und $\vec{b} = (-2, 1)^T$:
1) $\vec{a} + \vec{b}$ und 2) $\vec{a} - \vec{b}$ und 3) $\vec{a} - \vec{a}$

Skalare Multiplikation

Definition

Sei $\vec{a} = (a_1, \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $k \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann ist die skalare Multiplikation des Vektors $\vec{a}$ mit dem Skalar k definiert, durch

$$k \cdot \vec{a} \quad = \quad \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \dots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

Definition

Sei $\vec{a} = (a_1, \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $k \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann ist die skalare Multiplikation des Vektors $\vec{a}$ mit dem Skalar k definiert, durch

$$k \cdot \vec{a} \quad = \quad \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \dots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Example

Berechnen Sie für $\vec{a} = (2, 3)^T$ und $k = 2$:
1) $k \cdot \vec{a}$ und 2) $k^{-1} \cdot \vec{a}$ und 3) $k \cdot \vec{a} - \vec{a}$

Beispiel

Example

Sei $\vec{a} = (2,3)^T; \vec{b} = (-3,0)^T; k = 0.5$ berechnen Sie:

$$3\vec{a} - 4k\vec{b} \tag{1}$$

$$0.2(\vec{a} - \vec{b}) \tag{2}$$

Nullvektor und Gleichheit

Definition (Nullvektor)

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist der Vektor $\vec{0} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$.

Nullvektor und Gleichheit

Definition (Nullvektor)

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist der Vektor $\vec{0} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$.

Definition (Gleichheit)

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, wenn alle Koordinaten paarweise gleich sind, also $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots a_n = b_n$ gilt.

Länge eines Vektors

Definition (Länge eines Vektors)

Die Länge ($\|\cdot\|_2$-Norm) eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ ist gegeben durch

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Länge eines Vektors

Definition (Länge eines Vektors)

Die Länge ($\| \cdot \|_2$-Norm) eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ ist gegeben durch

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} := \|\vec{v}\|$$

Länge eines Vektors

Definition (Länge eines Vektors)

Die Länge ($\|\cdot\|_2$-Norm) eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ ist gegeben durch

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} := \|\vec{v}\|$$

Example

Berechnen Sie für $a = (3, 4, 0)^T$, $b = (2, 0, 1, -2)^T$ und $c = (1, -3, 21)^T$ jeweils die $\|\cdot\|_2$-Norm

Einheitsvektor

Definition

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor $\vec{v}$ der Länge 1, d.h. $\|\vec{v}\| = 1$.

Einheitsvektor

Definition

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor $\vec{v}$ der Länge 1, d.h. $\|\vec{v}\| = 1$.

Spezielle Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ sind:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T,\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T,\ e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$$

Abstand zweier Punkte

Vorgehen:
Gegeben seien zwei Punkte A und B. Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Punkten?

Abstand zweier Punkte

Vorgehen:
Gegeben seien zwei Punkte A und B. Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Punkten?
Zwischen A und B existiert der Richtungsvektor $\vec{AB}$.

Abstand zweier Punkte

Vorgehen:
Gegeben seien zwei Punkte A und B. Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Punkten?
Zwischen A und B existiert der Richtungsvektor $\vec{AB}$.
Dieser hat die Länge $\|\vec{AB}\|$.

Abstand zweier Punkte

Vorgehen:
Gegeben seien zwei Punkte A und B. Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Punkten?
Zwischen A und B existiert der Richtungsvektor $\vec{AB}$.
Dieser hat die Länge $\|\vec{AB}\|$.

Example

Berechnen Sie den Abstand von $A = (3, 1, 0, 2)$ und $B = (5, 1, -2, 3)$.

Lineare Abhängigkeit

Definition (Linearkombination)

Gegeben seien die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann heißt der Ausdruck

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$.

Lineare Abhängigkeit

Definition (Linearkombination)

Gegeben seien die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, k$. Dann heißt der Ausdruck

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_k$.

Definition (Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit)

Die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sind linear Unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt, in der alle Koeffizienten der Kombination auf den Wert Null gesetzt werden.

Satz zur linearen Unabhängigkeit

Theorem

Die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich (irgend-)einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen schreiben lässt.

Satz zur linearen Unabhängigkeit

Theorem

Die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich (irgend-)einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen schreiben lässt.

Example

Sind die folgenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

1) $v_1 = (3, 1, -2)^T$ und $v_2 = (-6, -2, 4)^T$
2) $v_1 = (0, 1, -3)^T$, $v_2 = (-1, 4, 0)^T$ und $v_3 = (-3, 14, -6)^T$
3) Bestimmen Sie drei Vektoren die linear abhängig oder unabhängig sind und geben Sie diese Ihrem Nachbarn als Hausaufgabe.

Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Example

Sei $a = (1, 0, 2)^T$ und $b = (-2, 3, 4)^T$. Dann ist

$$\langle a, b \rangle =$$

Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Example

Sei $a = (1, 0, 2)^T$ und $b = (-2, 3, 4)^T$. Dann ist

$$\langle a, b \rangle = 1 \cdot (-2)$$

Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Example

Sei $a = (1, 0, 2)^T$ und $b = (-2, 3, 4)^T$. Dann ist

$$\langle a, b \rangle = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3$$

Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Example

Sei $a = (1, 0, 2)^T$ und $b = (-2, 3, 4)^T$. Dann ist

$$\langle a, b \rangle = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Example

Sei $a = (1, 0, 2)^T$ und $b = (-2, 3, 4)^T$. Dann ist

$$\langle a, b \rangle = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6$$

Skalarprodukt: Übung und Regeln

Example

Berechnen Sie für $a = (-2, -1, 0)^T, b = (1, 2, 4)^T, \lambda = -1$

1) $\langle a, b \rangle$
2) $\langle b, a \rangle$
3) $\langle b, \lambda a \rangle$
4) $\langle a, a \rangle$

Skalarprodukt: Übung und Regeln

Example

Berechnen Sie für $a = (-2, -1, 0)^T, b = (1, 2, 4)^T, \lambda = -1$

1) $\langle a, b \rangle$
2) $\langle b, a \rangle$
3) $\langle b, \lambda a \rangle$
4) $\langle a, a \rangle$

Es gilt:

- $\langle a, a \rangle = 0$ genau dann wenn $a = 0$
- $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ (Symmetrie)
- $\langle a, \lambda b + \mu c \rangle = \lambda \langle a, b \rangle + \mu \langle a, c \rangle$ (Linearität)
- $a \perp b$ wenn $\langle a, b \rangle = 0$ (mit $a \neq 0$, $b \neq 0$) (Orthogonalität)

Winkel zwischen zwei Vektoren

Theorem

Für die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\langle a, b\rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ *der von den Vektoren* a *und* b *eingeschlossene Winkel ist.*

Winkel zwischen zwei Vektoren

Theorem

Für die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\varphi$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ *der von den Vektoren* a *und* b *eingeschlossene Winkel ist.*

Example

Sei $a = (2, 1)^T$ und $b = (-3, 4)^T$, berechne φ:

$$\cos\varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} = \frac{-6 + 4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} \approx -0.179$$

$$\varphi \approx \arccos(-0.179) \approx 100^\circ$$

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Gegeben sei ein Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $A = (-1, -1)$, $B = (2, 3)$ und $C = (2, 0)$. Berechne den Winkel zwischen den Seiten AB und BC.

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Gegeben sei ein Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $A = (-1, -1)$, $B = (2, 3)$ und $C = (2, 0)$. Berechne den Winkel zwischen den Seiten AB und BC.

Lösung:

$$\cos \varphi = \frac{\langle BA, BC \rangle}{\|BA\| \cdot \|BC\|}$$

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Gegeben sei ein Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $A = (-1, -1)$, $B = (2, 3)$ und $C = (2, 0)$. Berechne den Winkel zwischen den Seiten AB und BC.

Lösung:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\langle BA, BC\rangle}{\|BA\| \cdot \|BC\|} \\ BA &= a - b = (-3, -4); \quad \|BA\| = \sqrt{9+16} = 5 \end{aligned}$$

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Gegeben sei ein Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $A = (-1, -1)$, $B = (2, 3)$ und $C = (2, 0)$. Berechne den Winkel zwischen den Seiten AB und BC.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\langle BA, BC\rangle}{\|BA\| \cdot \|BC\|} \\
BA &= a - b = (-3, -4); \quad \|BA\| = \sqrt{9 + 16} = 5 \\
BC &= c - b = (0, -3); \quad \|BC\| = \sqrt{9} = 3
\end{aligned}
$$

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Gegeben sei ein Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $A = (-1, -1)$, $B = (2, 3)$ und $C = (2, 0)$. Berechne den Winkel zwischen den Seiten AB und BC.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\langle BA, BC\rangle}{\|BA\| \cdot \|BC\|} \\
BA &= a - b = (-3, -4); \quad \|BA\| = \sqrt{9 + 16} = 5 \\
BC &= c - b = (0, -3); \quad \|BC\| = \sqrt{9} = 3 \\
\cos\varphi &= \frac{(0 + 12)}{5 \cdot 3} = 0.8; \quad \varphi = \arccos(0.8) \approx 36.9^\circ
\end{aligned}
$$

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Finde einen zu $v = (1, -3)^T$ orthogonalen Vektor, also $x = (x_1, x_2)^T$ mit $\langle v, x \rangle = 0$.

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Finde einen zu $v = (1, -3)^T$ orthogonalen Vektor, also $x = (x_1, x_2)^T$ mit $\langle v, x \rangle = 0$.
Lösung:

- Löse $\langle v, x \rangle = 1x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2$

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Finde einen zu $v = (1, -3)^T$ orthogonalen Vektor, also $x = (x_1, x_2)^T$ mit $\langle v, x \rangle = 0$.
Lösung:

- Löse $\langle v, x \rangle = 1x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2$
- 1 Gleichung, 2 Variablen $\Rightarrow$ Unendlich viele Lösungen

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren

Example

Finde einen zu $v = (1, -3)^T$ orthogonalen Vektor, also $x = (x_1, x_2)^T$ mit $\langle v, x \rangle = 0$.
Lösung:

- Löse $\langle v, x \rangle = 1x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2$
- 1 Gleichung, 2 Variablen $\Rightarrow$ Unendlich viele Lösungen
- Wir dürfen einer Variablen mit beliebigem Wert $\neq 0$ einsetzen, z.B. $x_1 = 3$, dann $x_2 = 1$. D.h der Vektor $(3, 1)^T \perp (-1, 3)^T$.

Vektorraum

Definition

Sei K ein beliebiger Körper. Ein Vektorraum über K ist eine Menge V mit einer Addition $(+)$ und skalarer Multiplikation $(\cdot)$, so dass mit $a, b \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $a + b \in V, \lambda a \in V$ gilt und bezüglich $+$ und $\cdot$ die folgenden Rechenregeln gelten:

- $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(V, \cdot)$ ist eine Halbgruppe

Ist $K = \mathbb{R}$ so spricht man von einem reellen Vektorraum.
Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir uns hauptsächlich mit $V = \mathbb{R}^n$ beschäftigen.

Vektorraum Beispiele

Vektorräume:

- $\mathbb{R}^n$, insbesondere $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
- Die Menge aller Polynome mit der üblichen Addition und der skalaren Multiplikation ist ein Vektorraum.
- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum.

Kein Vektorraum:

- $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist *kein* Vektorraum.
- ...

Basis eines Vektorraumes

Definition

Sei V ein Vektorraum. Eine maximale Menge linear unabhängiger Vektoren $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ heißt Basis von V. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich als LK der Basisvektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$$

darstellen. Die Koeffizienten λ_i sind eindeutig bestimmt und werden als Koordinaten von v bzgl. der Basis genannt.

Basis eines Vektorraumes

Example

Die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:

$$\left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, b_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimension eines Vektorraumes

Definition

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum V wird als Dimension, $\dim(V)$, des Vektorraums bezeichnet.

Dimension eines Vektorraumes

Definition

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum V wird als Dimension, $\dim(V)$, des Vektorraums bezeichnet.

Theorem

Für einen n-dimensionalen Vektorraum ist jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren eine Basis. Umgekehrt hat jede Basisgenau n Vektoren.

Normierter Vektorraum

Definition

Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ - eine Norm auf V, dann sprechen wir von einem normierten Raum.

Normierter Vektorraum

Definition

Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ - eine Norm auf V, dann sprechen wir von einem normierten Raum.

Theorem

Ist V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so ist die Norm eines Vektors v definiert durch

$$\|v\|_2 = \langle v, v\rangle.$$

Orthogonale Projektion

Definition

Ein beliebiger Vektor a kann in Bezug auf eine Richtung, die durch einen anderen Vektor v gegeben ist, in zwei Komponenten $a = a_\perp + a_\|$, zerlegt werden, wobei die Komponente

$$a_\| = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

parallel zu v ist und

$$a_\perp = a - a_\|$$

orthogonal zu v ist.

Bemerkung: Es folgt $\|a_\|\| \leq \|a\|$.

Beispiel zur orthogonalen Projektion

Example

Sei $a = (1, 3)^T$ und $v = (2, 2)^T$. Bestimme die orthogonalen Komponenten von a in Richtung v.

Beispiel zur orthogonalen Projektion

Example

Sei $a = (1,3)^T$ und $v = (2,2)^T$. Bestimme die orthogonalen Komponenten von a in Richtung v.

$$
\begin{aligned}
a_{\|} &= \frac{\langle a, v\rangle v}{\langle v, v\rangle} \\
a_{\perp} &= a - a_{\|} \\
\langle a, v\rangle &= 2 + 6 = 8; \langle v, v\rangle = 4 + 4 = 8 \\
\Rightarrow a_{\|} &= \frac{8v}{8} = v \Rightarrow a_{\|} = (2,2)^T \\
a_{\perp} &= a - a_{\|} = (1,3)^T - (2,2)^T = (-1,1)^T.
\end{aligned}
$$

Kreuzprodukt

Definition

Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

Definition

Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

Wenn a und b linear unabhängig sind, dann gilt $c \perp a$ und $c \perp b$ für $c = a \times b$.

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechnen Sie

1.) $a = (4, 1, -1)^T$ und $b = (2, -1, 1)^T$, $a \times b = ?$

2.) $a = (3, 2, 1)^T$ und $b = (1, -2, -3)^T$, $a \times b = ?$

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechnen Sie

1.) $a = (4, 1, -1)^T$ und $b = (2, -1, 1)^T$, $a \times b = ?$

2.) $a = (3, 2, 1)^T$ und $b = (1, -2, -3)^T$, $a \times b = ?$

- Lösung zu 1.: $a \times b = (0, -6, -6)^T$

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechnen Sie

1.) $a = (4, 1, -1)^T$ und $b = (2, -1, 1)^T$, $a \times b = ?$

2.) $a = (3, 2, 1)^T$ und $b = (1, -2, -3)^T$, $a \times b = ?$

- Lösung zu 1.: $a \times b = (0, -6, -6)^T$
- Lösung zu 2.: $a \times b = (-4, 10, -8)^T$

Eigenschaften des Kreuzprodukts

Theorem

Für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *gilt:*

- $a \times b = -b \times a$ *Antikommutativ-Gesetz*
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *Distributivgesetz*
- $|a \times b|$ *entspricht der Fläche des durch* a *und* b *aufgespannten Parallelogramms.*
- $|a \times b| = \|a\| \cdot \|b\| \sin\varphi$, *wobei* φ *der Winkel zwischen* a *und* b *ist.*

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechne die Fläche F_{ABC} des durch die Punkte $A = (0, 1, \sqrt{3})$, $B = (0, 3, 3\sqrt{3})$ und $C = (6, 6, 2\sqrt{3})$ gegebenen Dreiecks.

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechne die Fläche F_{ABC} des durch die Punkte $A = (0, 1, \sqrt{3})$, $B = (0, 3, 3\sqrt{3})$ und $C = (6, 6, 2\sqrt{3})$ gegebenen Dreiecks.

$$F_{ABC} = 0.5 \cdot F_{ABCD}$$

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechne die Fläche F_{ABC} des durch die Punkte $A = (0, 1, \sqrt{3})$, $B = (0, 3, 3\sqrt{3})$ und $C = (6, 6, 2\sqrt{3})$ gegebenen Dreiecks.

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 0.5 \cdot F_{ABCD} \\
F_{ABCD} &= |AB \times AC| = \|AB\| \cdot \|AC\| \sin\varphi
\end{aligned}
$$

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechne die Fläche F_{ABC} des durch die Punkte $A = (0, 1, \sqrt{3})$, $B = (0, 3, 3\sqrt{3})$ und $C = (6, 6, 2\sqrt{3})$ gegebenen Dreiecks.

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 0.5 \cdot F_{ABCD} \\
F_{ABCD} &= |AB \times AC| = \|AB\| \cdot \|AC\| \sin\varphi \\
AB &= (0, 2, 2\sqrt{3})^T \Rightarrow \|AB\| = 4
\end{aligned}
$$

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechne die Fläche F_{ABC} des durch die Punkte $A = (0, 1, \sqrt{3})$, $B = (0, 3, 3\sqrt{3})$ und $C = (6, 6, 2\sqrt{3})$ gegebenen Dreiecks.

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 0.5 \cdot F_{ABCD} \\
F_{ABCD} &= |AB \times AC| = \|AB\| \cdot \|AC\| \sin\varphi \\
AB &= (0, 2, 2\sqrt{3})^T \Rightarrow \|AB\| = 4 \\
AC &= (6, 5, \sqrt{3})^T \Rightarrow \|AC\| = 8
\end{aligned}
$$

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechne die Fläche F_{ABC} des durch die Punkte $A = (0, 1, \sqrt{3})$, $B = (0, 3, 3\sqrt{3})$ und $C = (6, 6, 2\sqrt{3})$ gegebenen Dreiecks.

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 0.5 \cdot F_{ABCD} \\
F_{ABCD} &= |AB \times AC| = \|AB\| \cdot \|AC\| \sin\varphi \\
AB &= (0, 2, 2\sqrt{3})^T \Rightarrow \|AB\| = 4 \\
AC &= (6, 5, \sqrt{3})^T \Rightarrow \|AC\| = 8 \\
\cos\varphi &= \langle AB, AC\rangle / (\|AB\|\|AC\|) = 0.5 \Rightarrow \varphi = 60^\circ
\end{aligned}
$$

Beispiel zum Kreuzprodukt

Example

Berechne die Fläche F_{ABC} des durch die Punkte $A = (0, 1, \sqrt{3})$, $B = (0, 3, 3\sqrt{3})$ und $C = (6, 6, 2\sqrt{3})$ gegebenen Dreiecks.

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 0.5 \cdot F_{ABCD} \\
F_{ABCD} &= |AB \times AC| = \|AB\| \cdot \|AC\| \sin \varphi \\
AB &= (0, 2, 2\sqrt{3})^T \Rightarrow \|AB\| = 4 \\
AC &= (6, 5, \sqrt{3})^T \Rightarrow \|AC\| = 8 \\
\cos \varphi &= \langle AB, AC \rangle / (\|AB\| \|AC\|) = 0.5 \Rightarrow \varphi = 60^\circ \\
F_{ABC} &= 0.5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}/2 = 8\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Gerade

Definition (Parameterdarstellung einer Geraden)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Gerade g gegeben durch

$$g = \{p + \lambda \vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Gerade

Definition (Parameterdarstellung einer Geraden)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Gerade g gegeben durch

$$g = \{p + \lambda \vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Example

Geben Sie die Parameterdarstellung der Geraden g an die durch die Punkte $P = (1, 1, 0)$ und $Q = (2, 1, 1)$ verläuft.

Gerade

Definition (Parameterdarstellung einer Geraden)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Gerade g gegeben durch

$$g = \{p + \lambda\vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Example

Geben Sie die Parameterdarstellung der Geraden g an die durch die Punkte $P = (1, 1, 0)$ und $Q = (2, 1, 1)$ verläuft. Mögliche Lösung:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiele zu Geraden

Example

Gegeben sei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g mit der yz-Ebene.
- Bestimmen Sie den Schnittwinkel von g und der Geraden $\tilde{g}$

$$\tilde{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ebene

Definition (Parameterdarstellung einer Ebene)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektor $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$, dann ist die Ebene E gegeben durch

$$E = \{p + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Ebene

Definition (Parameterdarstellung einer Ebene)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektor $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \nparallel \vec{w}$, dann ist die Ebene E gegeben durch

$$E = \{p + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Example

Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E an, welche die Punkte $P = (0, 1, 3)$, $Q = (5, 2, 2)$ und $R = (3, 2, 3)$ beinhaltet.

Ebene

Definition (Parameterdarstellung einer Ebene)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektor $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \nparallel \vec{w}$, dann ist die Ebene E gegeben durch

$$E = \{p + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Example

Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E an, welche die Punkte $P = (0, 1, 3)$, $Q = (5, 2, 2)$ und $R = (3, 2, 3)$ beinhaltet. Mögliche Lösung:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Normalenform

Example

Liegt der Punkt $S = (0, 0, 3)$ in der Ebene E

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}?$$

Normalenform

Example

Liegt der Punkt $S = (0,0,3)$ in der Ebene E

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} ?$$

Lösung: Wähle eine andere Darstellung der Ebene, gegeben durch den (normierten) Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ der senkrecht auf der Ebene steht.

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (1/3, -2/3, 2/3)^T \\ E &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left\langle \vec{x} - \vec{p}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \end{aligned}$$

Normalenform

Example

Liegt der Punkt $S = (0,0,3)$ in der Ebene E

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}?$$

Lösung: Wähle eine andere Darstellung der Ebene, gegeben durch den (normierten) Normalenvektor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ der senkrecht auf der Ebene steht.

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (1/3, -2/3, 2/3)^T \\ E &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left\langle \vec{x} - \vec{p}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \Rightarrow S \notin E \end{aligned}$$

Darstellungen einer Ebene

Definition (Normalenform)

Eine Ebene E mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Normalenvektor $\vec{n}$, ist in Normalenform durch

$$E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0\right\}$$

mit $|\vec{n}| = 1$ gegeben.

Darstellungen einer Ebene

Definition (Normalenform)

Eine Ebene E mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Normalenvektor $\vec{n}$, ist in Normalenform durch

$$E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0\right\}$$

mit $|\vec{n}| = 1$ gegeben.

Definition (Koordinatenform)

Eine Ebene E mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Normalenvektor $\vec{n}$, ist in Koordinatenform durch

$$E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\right\}$$

mit $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$ und $d = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$ gegeben.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Einführendes Beispiel

Example (Stufenproduktion)

Bei einer Stufenproduktion werden in einer ersten Stufe drei verschiedene Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 aus zwei verschiedenen Rohstoffen R_1 und R_2 hergestellt. In einer zweiten Stufe werden die Zwischenprodukte zu zwei verschiedenen Erzeugnissen E_1 und E_2 verarbeitet. Jeder Produktionsstufe liegen Materialverbrauchsnormen r_{ij} bzw. z_{jk} zugrunde. Dabei gibt r_{ij} an, wie viel Mengeneinheiten (ME) des$i$-ten Rohstoffes zur Herstellung einer ME des j-ten Zwischenproduktes erforderlich sind. Entsprechend bezeichnet z_{jk} die Zahl der ME des j-ten Zwischenproduktes, die für die Produktion einer ME des k-ten Erzeugnisses verbraucht werden

Einführendes Beispiel

Example (Stufenproduktion)

Bei einer Stufenproduktion werden in einer ersten Stufe drei verschiedene Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 aus zwei verschiedenen Rohstoffen R_1 und R_2 hergestellt. In einer zweiten Stufe werden die Zwischenprodukte zu zwei verschiedenen Erzeugnissen E_1 und E_2 verarbeitet. Jeder Produktionsstufe liegen Materialverbrauchsnormen r_{ij} bzw. z_{jk} zugrunde. Dabei gibt r_{ij} an, wie viel Mengeneinheiten (ME) des$i$-ten Rohstoffes zur Herstellung einer ME des j-ten Zwischenproduktes erforderlich sind. Entsprechend bezeichnet z_{jk} die Zahl der ME des j-ten Zwischenproduktes, die für die Produktion einer ME des k-ten Erzeugnisses verbraucht werden
Aufgabe: Der Vorgang ist tabellarisch darzustellen.

Einführendes Beispiel

Example (Stufenproduktion)

Für jede der beiden Gruppen von Materialverbrauchsnormen ist jeweils eine Tabelle erforderlich. Für die eindeutige Platzzuweisung der R-Normen in der Tabelle vereinbaren wir: Der erste Index i von r_{ij} gibt die Zeile, der zweite Index j die Spalte an, in der r_{ij} in der Tabelle notiert wird. Analog wird mit z_{jk} verfahren.

Einführendes Beispiel

Example (Stufenproduktion)

Für jede der beiden Gruppen von Materialverbrauchsnormen ist jeweils eine Tabelle erforderlich. Für die eindeutige Platzzuweisung der R-Normen in der Tabelle vereinbaren wir: Der erste Index i von r_{ij} gibt die Zeile, der zweite Index j die Spalte an, in der r_{ij} in der Tabelle notiert wird. Analog wird mit z_{jk} verfahren.

T_1	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
R_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}

Einführendes Beispiel

Example (Stufenproduktion)

Für jede der beiden Gruppen von Materialverbrauchsnormen ist jeweils eine Tabelle erforderlich. Für die eindeutige Platzzuweisung der R-Normen in der Tabelle vereinbaren wir: Der erste Index i von r_{ij} gibt die Zeile, der zweite Index j die Spalte an, in der r_{ij} in der Tabelle notiert wird. Analog wird mit z_{jk} verfahren.

T_1	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}
R_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}

T_2	E_1	E_2
Z_1	z_{11}	z_{12}
Z_2	z_{21}	z_{22}
Z_3	z_{31}	z_{32}

Matrizen

Definition

Ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

heißt Matrix und wird mit A bezeichnet. Die Zahlen a_{ij} mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ heißen Elemente der Matrix A. Der erste Index (i) ist der Zeilenindex, der zweite (j) ist der Spaltenindex.

Vektoren und Matrizen

- Die Zahl der Zeilen und die Zahl der Spalten einer Matrix A werden zum Typ $(m; n)$ von A zusammengefasst. Also $A_{m;n}$ wobei m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten beschreibt.

Vektoren und Matrizen

- Die Zahl der Zeilen und die Zahl der Spalten einer Matrix A werden zum Typ $(m; n)$ von A zusammengefasst. Also $A_{m;n}$ wobei m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten beschreibt.
- Eine Matrix vom Typ $(m; 1)$ heißt Spaltenvektor, eine Matrix vom Typ $(1; n)$ heißt Zeilenvektor.

Vektoren und Matrizen

- Die Zahl der Zeilen und die Zahl der Spalten einer Matrix A werden zum Typ $(m; n)$ von A zusammengefasst. Also $A_{m;n}$ wobei m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten beschreibt.
- Eine Matrix vom Typ $(m; 1)$ heißt Spaltenvektor, eine Matrix vom Typ $(1; n)$ heißt Zeilenvektor.
- Eine Matrix wird im Allgemeinen mit einem großen Buchstaben, ein Vektor mit einem kleinen Buchstaben bezeichnet.

Beispiel

Example

Das Stufenproduktionsbeispiel liefert also zwei Matrizen, $M_{(R,Z)}$ und $M_{(Z,E)}$, die wir nun für die weiteren Beispiele mit Werten füllen:

$$M_{(R,Z)} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_{(Z,E)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- Sind sämtliche Elemente einer Matrix gleich null, so heißt sie *Nullmatrix* und wird mit O bezeichnet.

Spezielle Matrizen

- Sind sämtliche Elemente einer Matrix gleich null, so heißt sie *Nullmatrix* und wird mit O bezeichnet.

Example (Nullmatrix im $\mathbb{R}^3$)

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- Ist die Zahl der Zeilen einer Matrix gleich der Zahl ihrer Spalten, so wird sie *quadratische Matrix* genannt.

Spezielle Matrizen

- Ist die Zahl der Zeilen einer Matrix gleich der Zahl ihrer Spalten, so wird sie *quadratische Matrix* genannt.

Example (Quadratische Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- Ist die Zahl der Zeilen einer Matrix gleich der Zahl ihrer Spalten, so wird sie *quadratische Matrix* genannt.

Example (Quadratische Matrix)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Example (Nicht quadratische Matrix)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- Hat eine quadratische Matrix n Zeilen und n Spalten, so sagt man, dass sie von der *Ordnung* n ist.

Spezielle Matrizen

- Hat eine quadratische Matrix n Zeilen und n Spalten, so sagt man, dass sie von der *Ordnung* n ist.

Example (Quadratische Matrix der Ordnung 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- Hat eine quadratische Matrix n Zeilen und n Spalten, so sagt man, dass sie von der *Ordnung* n ist.

Example (Quadratische Matrix der Ordnung 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Example (Quadratische Matrix der Ordnung 2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- In einer quadratischen $(n \times n)$ Matrix bezeichnet man $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ als *Hauptdiagonale* und $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1,n}$ als *Nebendiagonale*.

Spezielle Matrizen

- In einer quadratischen $(n \times n)$ Matrix bezeichnet man $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ als *Hauptdiagonale* und $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1,n}$ als *Nebendiagonale*.

Example (1 auf der Hauptdiagonale)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

- In einer quadratischen ($n \times n$) Matrix bezeichnet man $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ als *Hauptdiagonale* und $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1,n}$ als *Nebendiagonale*.

Example (1 auf der Hauptdiagonale)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Example (1 auf der Nebendiagonale)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrizen

- Eine quadratische Matrix wird zu einer *oberen Dreiecksmatrix*, wenn alle Elemente unterhalb ihrer Hauptdiagonale null sind. Entsprechend wird sie *untere Dreiecksmatrix* genannt, wenn alle Elemente oberhalb ihrer Hauptdiagonale null sind.

Dreiecksmatrizen

- Eine quadratische Matrix wird zu einer *oberen Dreiecksmatrix*, wenn alle Elemente unterhalb ihrer Hauptdiagonale null sind. Entsprechend wird sie *untere Dreiecksmatrix* genannt, wenn alle Elemente oberhalb ihrer Hauptdiagonale null sind.

Example (Dreiecksmatrix)

$$R = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

- Eine quadratische Matrix heißt *Diagonalmatrix*, wenn alle Elemente außerhalb ihrer Hauptdiagonale gleich null sind.
- Eine Diagonalmatrix, deren Elemente in der Hauptdiagonale alle gleich eins sind, wird *Einheitsmatrix* genannt und mit E (oder I) bezeichnet.

Diagonalmatrix

- Eine quadratische Matrix heißt *Diagonalmatrix*, wenn alle Elemente außerhalb ihrer Hauptdiagonale gleich null sind.
- Eine Diagonalmatrix, deren Elemente in der Hauptdiagonale alle gleich eins sind, wird *Einheitsmatrix* genannt und mit E (oder I) bezeichnet.

Example (Diagonalmatrix)

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrizen

Entnimmt man einer gegebenen Matrix $A = (a_{ij})$ vom Typ $(m; n)$ die Elemente der i-ten Zeile $(i = 1; 2; \ldots; m)$ und schreibt sie als Elemente der i-ten Spalte einer neuen Matrix, so hat diese neue Matrix den Typ $(n; m)$ und heißt *transponierte Matrix* von A. Als Symbol für die transponierte Matrix von A wird A^T (oder A') verwendet.

Transponierte Matrizen

Entnimmt man einer gegebenen Matrix $A = (a_{ij})$ vom Typ $(m; n)$ die Elemente der i-ten Zeile $(i = 1; 2; \ldots; m)$ und schreibt sie als Elemente der i-ten Spalte einer neuen Matrix, so hat diese neue Matrix den Typ $(n; m)$ und heißt *transponierte Matrix* von A. Als Symbol für die transponierte Matrix von A wird A^T (oder A') verwendet.

Example (Transponierte)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrizen

Example (Übung)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

berechnen Sie $\left(A^T\right)^T$.

Transponierte Matrizen

Example (Übung)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

berechnen Sie $\left(A^T\right)^T$.

Theorem

Es gilt stets $\left(A^T\right)^T = A$

Symmetrische Matrizen

Definition

Eine Matrix heißt *symmetrisch* falls $A^T = A$ gilt.

Symmetrische Matrizen

Definition

Eine Matrix heißt *symmetrisch* falls $A^T = A$ gilt.

Example (Symmetrische und nicht symmetrische Matrix)

$$S = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

A ist nicht symmetrisch, S ist symmetrisch.

Symmetrische Matrizen

- Jede symmetrische Matrix ist quadratisch, dagegen ist durchaus nicht jede quadratische Matrix symmetrisch (siehe vorheriges Beispiel).

Symmetrische Matrizen

- Jede symmetrische Matrix ist quadratisch, dagegen ist durchaus nicht jede quadratische Matrix symmetrisch (siehe vorheriges Beispiel).
- Ist $A = (a_{ij})$ eine symmetrische Matrix der Ordnung n, so gilt für ihre Elemente die Relation

$$a_{ij} = a_{ji},\ \forall i \neq j, i = 1; 2; \ldots; n \text{ und } j = 1; 2; \ldots; n.$$

Damit ist ein anschauliches Prüfkriterium für die Symmetrie einer Matrix verbunden:
Die Elemente einer symmetrischen Matrix, die spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonale der Matrix stehen, sind immer gleich.

Symmetrische Matrix

Example (Übung)

Welche der folgenden Matrizen ist symmetrisch?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -11 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} x^2 & \sin^2 x \\ 1 - \cos^2 x & x^3 + bx^2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Matrizen

Example (Übung)

Geben Sie die Merkmale der folgenden Matrizen an

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleiche Matrizen

Definition

Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ heißen gleich, wenn ihre Typen übereinstimmen und alle ihre Elemente mit gleichem Doppelindex gleich sind:

$$A_{(m;n)} = B_{(k;l)}, \quad \text{wenn } m = k, n = l \text{ und } a_{ij} = b_{ij} \; \forall i, j.$$

Example (Gleichheit)

Die folgenden Matrizen stimmen überein

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 3 & 2 \cdot 3 \\ 3 & 5-4 & 6 \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion

Definition

Sind zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ vom gleichen Typ $(m; n)$, dann kann man sie addieren bzw. subtrahieren. Ihre Summe bzw. Differenz

$$A \pm B = C \text{ mit } C = (c_{ij})$$

ergibt sich durch Addition bzw. Subtraktion ihrer entsprechenden Elemente

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \; \forall i = 1, 2, \ldots, m \text{ und } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Insbesondere ist der Typ vom C der gleiche Typ wie von b und A.

Addition und Subtraktion von Matrizen

Example (Übung)

Berechnen Sie $A + B$ und $A - B$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

Definition

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ wird mit einer Zahl (einem Skalar) α multipliziert, indem man jedes Element von A mit a multipliziert:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Skalare Multiplikation

Definition

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ wird mit einer Zahl (einem Skalar) α multipliziert, indem man jedes Element von A mit a multipliziert:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Example (Skalare Multiplikation)

Gegeben sei $\alpha = 5$ und A aus dem vorherigen Beispiel, dann gilt

$$\alpha \cdot A \quad = \quad 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 10 & 25 \\ 5 & 10 & -25 \\ 15 & -40 & 10 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(assoziativ)*

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(assoziativ)*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(assoziativ)*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(assoziativ)*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(assoziativ)*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- *Aus* $A + B = 0$ *folgt* $B = -A = (-1) \cdot A$.

Eigenschaften der Addition und Subtraktion

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(assoziativ)*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- *Aus* $A + B = 0$ *folgt* $B = -A = (-1) \cdot A$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

Addition und Subtraktion von Matrizen

Example (Übung)

Gegeben seien $\alpha = 2$, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\alpha(A + B)$, $(A + B) - A$, $A - A^T$ und $B - B^T$.

Matrizen Multiplikation

Definition (Matrizen Multiplikation I)

Ist $A = (a_{ik})$ eine Matrix vom Typ (m, p) und $B = (b_{kj})$ eine Matrix vom Typ (p, n) dann kann das Produkt $A \cdot B$ gebildet werden. Es ist ebenfalls eine Matrix

$$AB = C \text{ mit } C = (c_{ij})$$

Matrizen Multiplikation

Definition (Matrizen Multiplikation I)

Ist $A = (a_{ik})$ eine Matrix vom Typ (m, p) und $B = (b_{kj})$ eine Matrix vom Typ (p, n) dann kann das Produkt $A \cdot B$ gebildet werden. Es ist ebenfalls eine Matrix

$$AB = C \text{ mit } C = (c_{ij})$$

Example

Gegeben seien A vom Typ $(2; 3)$ und B vom Typ $(3; 2)$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Matrizen Multiplikation

Definition (Matrizen Multiplikation II)

Dabei gilt:

a) Die Produktmatrix $AB = C$ hat den Typ (m, n), d. h.

$$A_{(m;p)} B_{(p;n)} = C_{(m;n)} \begin{cases} m \text{ Zahl der Zeilen von } A \\ n \text{ Zahl der Spalten von } B \end{cases}$$

b) Jedes Element c_{ij} der Produktmatrix $C = AB$ berechnet sich als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \ \forall i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n.$$

Matrizen Multiplikation

Example

Gegeben seien A vom Typ $(2;3)$ und B vom Typ $(3;2)$ mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrizen Multiplikation

Example

Gegeben seien A vom Typ $(2;3)$ und B vom Typ $(3;2)$ mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \\ & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrizen Multiplikation

Example

Gegeben seien A vom Typ $(2;3)$ und B vom Typ $(3;2)$ mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrizen Multiplikation

Example

Gegeben seien A vom Typ $(2;3)$ und B vom Typ $(3;2)$ mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrizen Multiplikation

Example

Gegeben seien A vom Typ $(2;3)$ und B vom Typ $(3;2)$ mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplikation von Matrizen

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (falls möglich) AB, BA, BC, CD, DC und DD.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- Aus $AB = 0$ folgt i. Allg. weder $A = 0$ noch $B = 0$.

Example (Beispiel)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 3 & -9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

es gilt, $AB = 0$.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- Selbst wenn für zwei Matrizen A und B beide Produkte AB sowie BA existieren, so gilt i. Allg. $AB \neq BA$.

Example (Beispiel)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

es gilt, $AB \neq BA$.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- $AE = A$ und $EA = A$ mit entsprechend verkettbaren Einheitsmatrizen E;
- $AO = O$ und $OA = O$ mit entsprechend verkettbaren Nullmatrizen O:

Example (Beispiel)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es gilt, $AE = EA = A$.

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- $(AB)C = A(BC) = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- $(AB)C = A(BC) = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

Potenzen

Definition

Jede beliebige quadratische Matrix A kann beliebig oft mit sich selbst multipliziert werden, was zur Bildung von Potenzen führt

$$AA = A^2, AAA = A^3 \text{ usw.}$$

Potenzen

Definition

Jede beliebige quadratische Matrix A kann beliebig oft mit sich selbst multipliziert werden, was zur Bildung von Potenzen führt

$$AA = A^2, AAA = A^3 \text{ usw.}$$

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^2 und B^{10}.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Motivation

Betrachten wir das einführende Beispiel (siehe Seite 84) bzgl der Stufenproduktion. Es soll nun bestimmt werden, wie viele Rohstoffe x_1 und x_2 von R_1 und R_2 geordert werden müssen, um b_1 und b_2 vielen Mengeneinheiten (ME) von E_1 und E_2 herzustellen.

Motivation

Betrachten wir das einführende Beispiel (siehe Seite 84) bzgl der Stufenproduktion. Es soll nun bestimmt werden, wie viele Rohstoffe x_1 und x_2 von R_1 und R_2 geordert werden müssen, um b_1 und b_2 vielen Mengeneinheiten (ME) von E_1 und E_2 herzustellen.
Dies führt zu einem Linearen Gleichungssystem (LGS):

$$M_{(R,Z)}M_{(Z,E)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Motivation

Betrachten wir das einführende Beispiel (siehe Seite 84) bzgl der Stufenproduktion. Es soll nun bestimmt werden, wie viele Rohstoffe x_1 und x_2 von R_1 und R_2 geordert werden müssen, um b_1 und b_2 vielen Mengeneinheiten (ME) von E_1 und E_2 herzustellen.
Dies führt zu einem Linearen Gleichungssystem (LGS):

$$M_{(R,Z)}M_{(Z,E)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Motivation

Betrachten wir das einführende Beispiel (siehe Seite 84) bzgl der Stufenproduktion. Es soll nun bestimmt werden, wie viele Rohstoffe x_1 und x_2 von R_1 und R_2 geordert werden müssen, um b_1 und b_2 vielen Mengeneinheiten (ME) von E_1 und E_2 herzustellen.
Dies führt zu einem Linearen Gleichungssystem (LGS):

$$M_{(R,Z)}M_{(Z,E)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Wie können wir das lösen?

Motivation

Gegeben sei also

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Motivation

Gegeben sei also

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Achtung: durch A teilen ist nicht erlaubt / nicht definiert!

Motivation

Gegeben sei also

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Achtung: durch A teilen ist nicht erlaubt / nicht definiert! Angenommen wir hätten eine Matrix B für die $B \cdot A = E$ gilt, dann bekommen wir bei der Multiplikation mit B von *links*

$$\begin{aligned} B| \quad A\vec{x} &= \vec{b} \\ BA\vec{x} &= B\vec{b} \end{aligned}$$

Motivation

Gegeben sei also

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Achtung: durch A teilen ist nicht erlaubt / nicht definiert! Angenommen wir hätten eine Matrix B für die $B \cdot A = E$ gilt, dann bekommen wir bei der Multiplikation mit B von *links*

$$\begin{aligned} B|\quad A\vec{x} &= \vec{b} \\ BA\vec{x} &= B\vec{b} \\ E\vec{x} &= \vec{b}^* \end{aligned}$$

Motivation

Gegeben sei also

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Achtung: durch A teilen ist nicht erlaubt / nicht definiert! Angenommen wir hätten eine Matrix B für die $B \cdot A = E$ gilt, dann bekommen wir bei der Multiplikation mit B von *links*

$$\begin{aligned} B|\quad A\vec{x} &= \vec{b} \\ BA\vec{x} &= B\vec{b} \\ E\vec{x} &= \vec{b}^* \\ \vec{x} &= \vec{b}^* \end{aligned}$$

Motivation

Gegeben sei also

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Achtung: durch A teilen ist nicht erlaubt / nicht definiert! Angenommen wir hätten eine Matrix B für die $B \cdot A = E$ gilt, dann bekommen wir bei der Multiplikation mit B von *links*

$$\begin{array}{rrcl} B| & A\vec{x} & = & \vec{b} \\ & BA\vec{x} & = & B\vec{b} \\ & E\vec{x} & = & \vec{b}^* \\ & \vec{x} & = & \vec{b}^* \end{array}$$

Es stellt sich also die Frage, ob und wenn ja, wann es solch eine Matrix gibt?

Division von Matrizen?

Gegeben sei eine quadratische Matrix A, bestimme B mit

$$AB = E = BA.$$

Division von Matrizen?

Gegeben sei eine quadratische Matrix A, bestimme B mit

$$AB = E = BA.$$

Definition

Es sei A eine quadratische Matrix. Wenn für sie eine Matrix A^K derart existiert, dass

$$A^K A = AA^K = E$$

gilt, so heißt A^K inverse Matrix von A und wird mit A^{-1} bezeichnet. Damit lautet die Definitionsrelation für A^{-1}

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Berechnung einer Inversen

Example (Beispiel)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, gesucht ist A^{-1}.

Berechnung einer Inversen

Example (Beispiel)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, gesucht ist A^{-1}.
Lösung:
A^{-1} existiert für alle $\alpha \neq 6$ mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha - 6} \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse einer 2×2 Matrix

Theorem

Wenn für die quadratische Matrix 2.Ordnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ *gilt, dann besitzt* A *eine Inverse* A^{-1}*, und sie berechnet sich gemäß*

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften quadratischer Matrizen

Definition

Quadratische Matrizen, die eine Inverse besitzen, heißen *regulär*.
Quadratische Matrizen, für die keine Inverse existiert, heißen *singulär*.

Eigenschaften quadratischer Matrizen

Definition

Quadratische Matrizen, die eine Inverse besitzen, heißen *regulär*.
Quadratische Matrizen, für die keine Inverse existiert, heißen *singulär*.

- Jede Einheitsmatrix E ist regulär und es gilt $E^{-1} = E$.

Eigenschaften quadratischer Matrizen

Definition

Quadratische Matrizen, die eine Inverse besitzen, heißen *regulär*.
Quadratische Matrizen, für die keine Inverse existiert, heißen *singulär*.

- Jede Einheitsmatrix E ist regulär und es gilt $E^{-1} = E$.
- Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär, wenn keiner ihrer Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) als Linearkombination ihrer restlichen Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) dargestellt werden kann.

Eigenschaften quadratischer Matrizen

Definition

Quadratische Matrizen, die eine Inverse besitzen, heißen *regulär*.
Quadratische Matrizen, für die keine Inverse existiert, heißen *singulär*.

- Jede Einheitsmatrix E ist regulär und es gilt $E^{-1} = E$.
- Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär, wenn keiner ihrer Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) als Linearkombination ihrer restlichen Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) dargestellt werden kann.
- Eine quadratische Matrix A ist genau dann singulär, wenn wenigstens einer ihrer Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) als Linearkombination ihrer restlichen Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) dargestellt werden kann.

Übung zu regulären und Singulären Matrizen

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sind die Matrizen singulär oder regulär?

Regeln für Inverse Matrizen

- Ist A regulär, so ist auch A^{-1} regulär und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$

Regeln für Inverse Matrizen

- Ist A regulär, so ist auch A^{-1} regulär und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Für reguläre Matrizen A und B von gleicher Ordnung ist auch ihr Produkt AB eine reguläre Matrix, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Regeln für Inverse Matrizen

- Ist A regulär, so ist auch A^{-1} regulär und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Für reguläre Matrizen A und B von gleicher Ordnung ist auch ihr Produkt AB eine reguläre Matrix, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $AB \neq 0$, wenn A und B regulär und von gleicher Ordnung.

Regeln für Inverse Matrizen

- Ist A regulär, so ist auch A^{-1} regulär und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Für reguläre Matrizen A und B von gleicher Ordnung ist auch ihr Produkt AB eine reguläre Matrix, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $AB \neq 0$, wenn A und B regulär und von gleicher Ordnung.
- Ist A eine reguläre Matrix und ist B mit A in der Reihenfolge A, B verkettbar, dann folgt aus $AB = 0$ stets $B = 0$.

Regeln für Inverse Matrizen

- Ist A regulär, so ist auch A^{-1} regulär und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Für reguläre Matrizen A und B von gleicher Ordnung ist auch ihr Produkt AB eine reguläre Matrix, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $AB \neq 0$, wenn A und B regulär und von gleicher Ordnung.
- Ist A eine reguläre Matrix und ist B mit A in der Reihenfolge A, B verkettbar, dann folgt aus $AB = 0$ stets $B = 0$.
- Ist A eine reguläre Matrix, so ist auch ihre transponierte Matrix A^T regulär, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Regeln für Inverse Matrizen

- Ist A regulär, so ist auch A^{-1} regulär und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Für reguläre Matrizen A und B von gleicher Ordnung ist auch ihr Produkt AB eine reguläre Matrix, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $AB \neq 0$, wenn A und B regulär und von gleicher Ordnung.
- Ist A eine reguläre Matrix und ist B mit A in der Reihenfolge A, B verkettbar, dann folgt aus $AB = 0$ stets $B = 0$.
- Ist A eine reguläre Matrix, so ist auch ihre transponierte Matrix A^T regulär, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Was können wir damit für unser Gleichungssystem folgern?

Lösungen für LGS

Theorem

Wenn A eine reguläre Matrix ist, so hat jede der Gleichungen

$$AX = B \quad bzw. \quad YA = B$$

eine (eindeutige) Lösung, und diese Lösungen ergeben sich zu

$$X = A^{-1}B \quad bzw. \quad Y = BA^{-1}$$

Lösungen für LGS

Theorem

Wenn A eine reguläre Matrix ist, so hat jede der Gleichungen

$$AX = B \quad \textit{bzw.} \quad YA = B$$

eine (eindeutige) Lösung, und diese Lösungen ergeben sich zu

$$X = A^{-1}B \quad \textit{bzw.} \quad Y = BA^{-1}$$

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist die Lösung X der Gleichung $AX = B$.

Rang einer Matrix

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

Rang einer Matrix

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

- Für jede beliebige Matrix ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich der maximalen Zahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren.

Rang einer Matrix

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

- Für jede beliebige Matrix ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich der maximalen Zahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren.
- Wenn A regulär, dann $r(A) =$ Ordnung von A.

Rang einer Matrix

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

- Für jede beliebige Matrix ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich der maximalen Zahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren.
- Wenn A regulär, dann $r(A) =$ Ordnung von A.
- Wenn A singulär, dann $r(A) <$ Ordnung von A.

Rang einer Matrix

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

- Für jede beliebige Matrix ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich der maximalen Zahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren.
- Wenn A regulär, dann $r(A) =$ Ordnung von A.
- Wenn A singulär, dann $r(A) <$ Ordnung von A.
- Wenn A vom Typ $(m; n)$, dann $r(A) \leq \min(m, n)$.

Rang einer Matrix

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

- Für jede beliebige Matrix ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich der maximalen Zahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren.
- Wenn A regulär, dann $r(A) =$ Ordnung von A.
- Wenn A singulär, dann $r(A) <$ Ordnung von A.
- Wenn A vom Typ $(m; n)$, dann $r(A) \leq \min(m, n)$.
- Der Rang einer beliebigen Matrix A ist gleich der maximalen Zahl verschiedener Einheitsvektoren, die man durch elementare Umformungen von A erzeugen kann.

Inverse und LGS für $\mathbb{R}^n$, $n > 2$

Für Gleichungen der Art

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$$

im $\mathbb{R}^2$ haben wir jetzt eine Lösungsmöglichkeit gefunden.
Wie verhält es sich in höheren Dimensionen?

Determinante einer Matrix

Definition (Untermatrix)

Wenn wir nun aus einer quadratischen Matrix A die Zeile i und die Spalte k herausstreichen, so bezeichnen wir das Ergebnis als Untermatrix A_{ik}.

Determinante einer Matrix

Definition (Untermatrix)

Wenn wir nun aus einer quadratischen Matrix A die Zeile i und die Spalte k herausstreichen, so bezeichnen wir das Ergebnis als Untermatrix A_{ik}.

Definition (Determinante)

Es sei A eine quadratische $(n; n)$-Matrix mit den Untermatrizen A_{ik}. Die Determinante $\det(A)$ von A ist eine reelle Zahl, die durch

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik})$$

für $n > 1$ rekursiv erklärt ist. Für $n = 1$ und $A = (a_{11})$ wird $\det(A) = a_{11}$ gesetzt.

Determinanten im$\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

- Im $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Determinanten im$\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

- Im $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Im $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} \\ &\quad + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned}$$

Beispiel

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die $\det(A)$.

Beispiel

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die $\det(A)$. *Lösung*: $\det(A) = -25$.

Beispiel

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die $\det(A)$.

Beispiel

Example (Übung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die $\det(A)$. *Lösung*: $\det(A) = -12$.

Rechenregeln für Determinanten

Es seien A, B quadratische Matrizen vom Typ $(n; n)$, A^T bezeichne die Transponierte von A. Dann gilt

- $\det(A) = \det(A^T)$

Rechenregeln für Determinanten

Es seien A, B quadratische Matrizen vom Typ $(n; n)$, A^T bezeichne die Transponierte von A. Dann gilt

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Rechenregeln für Determinanten

Es seien A, B quadratische Matrizen vom Typ $(n; n)$, A^T bezeichne die Transponierte von A. Dann gilt

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Rechenregeln für Determinanten

Es seien A, B quadratische Matrizen vom Typ $(n; n)$, A^T bezeichne die Transponierte von A. Dann gilt

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n$

Rechenregeln für Determinanten

Es seien A, B quadratische Matrizen vom Typ $(n; n)$, A^T bezeichne die Transponierte von A. Dann gilt

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n$
- $\det(E) = 1$ für jede Einheitsmatrix E.

Determinante und Inverse

Theorem

Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär (oder nicht singulär), wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d. h. wenn gilt: $\det(A) \neq 0$. *Umgekehrt ist sie genau dann singulär, wenn* $\det(A) = 0$ *gilt.*

Determinante und Inverse

Theorem

Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär (oder nicht singulär), wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d. h. wenn gilt: $\det(A) \neq 0$. *Umgekehrt ist sie genau dann singulär, wenn* $\det(A) = 0$ *gilt.*

Folglich ist ein Lineares Gleichungssystem der Form

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$$

genau dann eindeutig lösbar wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Determinante und Inverse

Theorem

Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär (oder nicht singulär), wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d. h. wenn gilt: $\det(A) \neq 0$. Umgekehrt ist sie genau dann singulär, wenn $\det(A) = 0$ gilt.

Folglich ist ein Lineares Gleichungssystem der Form

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$$

genau dann eindeutig lösbar wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Wie lösen wir das Gleichungssystem?

Determinante und Inverse

Theorem

Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär (oder nicht singulär), wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d. h. wenn gilt: $\det(A) \neq 0$*. Umgekehrt ist sie genau dann singulär, wenn* $\det(A) = 0$ *gilt.*

Folglich ist ein Lineares Gleichungssystem der Form

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$$

genau dann eindeutig lösbar wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Wie lösen wir das Gleichungssystem? Gauß-Algorithmus

Gauß-Algorithmus

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie bestimmt man die Inverse A^{-1} von A?

Gauß-Algorithmus

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie bestimmt man die Inverse A^{-1} von A? Wir benutzen Elementare Umformungen in Form von Multiplikationen, Additionen und Zeilenvertauschungen.

Gauß-Algorithmus, Beispiel

elementare Umformungen	A			E		
Z_1	2	9	23	1	0	0
Z_2	1	2	4	0	1	0
Z_3	6	4	2	0	0	1
$Z_4 = Z_2$	1	2	4	0	1	0
$Z_5 = Z_1$	2	9	23	1	0	0
$Z_6 = Z_3$	6	4	2	0	0	1
* $Z_7 = Z_4$	1	2	4	0	1	0
$Z_8 = Z_5 - 2Z_7$	0	5	15	1	-2	0
$Z_9 = Z_6 - 6Z_7$	0	-8	-22	0	-6	1
$Z_{10} = Z_7 - 2Z_{11}$	1	0	-2	$-2/5$	$9/5$	0
* $Z_{11} = (1/5)Z_8$	0	1	3	$1/5$	$-2/5$	0
$Z_{12} = Z_9 + 8Z_{11}$	0	0	2	$8/5$	$-46/5$	1
$Z_{13} = Z_{10} + 2Z_{15}$	1	0	0	$6/5$	$-37/5$	1
$Z_{14} = Z_{11} - 3Z_{15}$	0	1	0	$-11/5$	$67/5$	$-3/2$
* $Z_{15} = (1/2)Z_{12}$	0	0	1	$4/5$	$-23/5$	$1/2$

Gauß-Algorithmus, Beispiel

Gegeben sei nun zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

ein Vektor $\vec{b} = (5, 10, 4)^T$, so dass wir nun ein vollständiges LGS haben.

Gauß-Algorithmus, Beispiel

Gegeben sei nun zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

ein Vektor $\vec{b} = (5, 10, 4)^T$, so dass wir nun ein vollständiges LGS haben.

$$A\vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

Gauß-Algorithmus, Beispiel

Gegeben sei nun zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

ein Vektor $\vec{b} = (5, 10, 4)^T$, so dass wir nun ein vollständiges LGS haben.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus, Beispiel

Gegeben sei nun zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

ein Vektor $\vec{b} = (5, 10, 4)^T$, so dass wir nun ein vollständiges LGS haben.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus, Beispiel

Mit der berechneten Inversen erhalten wir also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 & -37/5 & 1 \\ -11/5 & 67/5 & -3/2 \\ 4/5 & -23/5 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus, Beispiel

Mit der berechneten Inversen erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6/5 & -37/5 & 1 \\ -11/5 & 67/5 & -3/2 \\ 4/5 & -23/5 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 - 37 \cdot 2 + 4 \\ -11 + 67 \cdot 2 - 6 \\ 4 - 23 \cdot 2 + 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -64 \\ 117 \\ -40 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus

Example

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ob die Matrix Singulär oder Regulär ist mit Hilfe des Gauss Algorithmus.

Gauß-Algorithmus, Beispiel

elementare Umformungen		A			E	
Z_1	10	3	1	1	0	0
Z_2	4	2	0	0	1	0
Z_3	2	3	-1	0	0	1
$*\ Z_4 = (1/2)Z_3$	1	$3/2$	$-1/2$	0	0	$1/2$
$Z_5 = Z_1 - 10Z_4$	0	-12	6	1	0	-5
$Z_6 = Z_2 - 4Z_4$	0	-4	2	0	1	-2
$Z_7 = Z_4 - (3/2)Z_8$	1	0	$1/4$	$1/8$	0	$-1/8$
$*\ Z_8 = -(1/12)Z_5$	0	1	$-1/2$	$-1/12$	0	$5/12$
$Z_9 = Z_6 + 4Z_8$	0	0	0	$-1/3$	1	$-1/3$

Homogene Lineare Gleichungssysteme

Theorem

Jedes homogene LAGS

$$Ax = 0 \quad mit A = A_{(m;n)}$$

ist immer lösbar. Eine Lösung ist nämlich der entsprechende Nullvektor:

$$A_{(m;n)} 0_{(n;1)} = 0_{(m;1)}$$

Homogene LAGSe können auch vom Nullvektor verschiedene Lösungen besitzen.
Der Nullvektor $0_{(n;1)}$ *heißt triviale Lösung des homogenen LAGSs; jeder Vektor* $\vec{x} \neq 0$, *der das LAGs erfüllt heißt nichttriviale Lösung des homogenen LAGSs.*

Kanonische Normalform

Theorem (kanonische Normalform)

Die kanonische Normalform eines LAGSs ist dadurch charakterisiert, dass in den Spalten ihrer Systemmatrix die maximale Anzahl von Einheitsvektoren erzeugt ist; der Platz der einzelnen Einheitsvektoren in der transformierten Matrix ist dabei völlig bedeutungslos.

Definition (Pivot)

Das Element, welches nach Abschluss eines Rechentableaus zur Erzeugung der 1 für den nächsten Einheitsvektor ausgewählt wird, heißt Pivotelement (Führungselement). Zeile und Spalte, in denen ein Pivotelement steht, werden Pivotzeile und Pivotspalte genannt.

Lösbarkeit von LGS

Für ein beliebiges inhomogenes LAGS $Ax = b$; $b \neq 0$ tritt genau eine der drei Möglichkeiten ein:

- Es ist eindeutig lösbar
- es ist mehrdeutig lösbar, d. h. es besitzt mehr als eine Lösung
- es ist unlösbar.

Wenn $r(A) < r(A;b)$, dann ist $Ax = b$ nicht lösbar.
Wenn $r(A) = r(A;b)$, dann ist $Ax = b$ lösbar, und es gilt

a) die Lösung ist eindeutig, wenn
$r(A) = r(A;b) = n$ ($=$ Zahl der Unbekannten)

b) die Lösung ist mehrdeutig, wenn
$r(A) = r(A;b) < n$ ($=$ Zahl der Unbekannten)

Gauß-Algorithmus, Beispiel

Example

Gegeben sei nun zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 23 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

ein Vektor $\vec{b} = (11, 3, 12, 2)^T$.

Gauß-Algorithmus, Beispiel

elementare Umformungen		x_1	x_2	x_3	b
Z_1		2	9	23	11
Z_2		$\boxed{1}$ 1)	2	4	3
Z_3		6	4	2	12
Z_4		-1	3	11	2
$Z_5 = Z_2$	* 2)	1	2	4	3
$Z_6 = Z_1 - 2Z_5$		0	$\boxed{5}$	15	5
$Z_7 = Z_3 - 6Z_5$		0	-8	-22	-6
$Z_8 = Z_4 + Z_5$		0	5	15	5
$Z_9 = Z_5 - 2Z_{10}$		1	0	-2	1
$Z_{10} = 1/5 \cdot Z_6$	*	0	1	3	1
$Z_{11} = Z_7 + 8Z_{10}$		0	0	$\boxed{2}$	2
$Z_{12} = Z_8 - 5Z_{10}$		0	0	0	0
$Z_{13} = Z_9 + 2Z_{12}$		1	0	0	3
$Z_{14} = Z_{10} - 3Z_{12}$		0	1	0	-2
$Z_{15} = 1/2 \cdot Z_{11}$	*	0	0	1	1
$Z_{16} = Z_{12}$		0	0	0	0

Eigenwert und Eigenvektor

Definition

Eine komplexe Zahl λ heißt Eigenwert der quadratischen Matrix A, wenn es Vektoren $\vec{x} \neq 0$ gibt, die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

sind. Die Lösungsvektoren $\vec{x}$ heißen Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ.

Eigenwert und Eigenvektor

Definition

Eine komplexe Zahl λ heißt Eigenwert der quadratischen Matrix A, wenn es Vektoren $\vec{x} \neq 0$ gibt, die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

sind. Die Lösungsvektoren $\vec{x}$ heißen Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ.

Definition

Gegeben sei eine Matrix A, dann heißt $\det(A - \lambda E) = 0$ die charakteristische Gleichung von A.

Übung zu Eigenvektor und Eigenwert

Example

Geben sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$ an.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Folgen

Definition

Ordnet man jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zu, so entsteht durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad = \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$$

ein *reelle Zahlenfolge* oder kurz: *Folge*.

- $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißen *Glieder* der Folge; a_n ist das *n-te Folgenglied*.
- Eine Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung $a_n = f(n)$, für $n \in \mathbb{N}$ heißt Bildungsgesetz der Folge.

Grenzwert einer Folge

Definition

$g \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn zu jedem (beliebig kleinem) $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - g| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

gilt. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Bemerkung: Eine Folge die nicht konvergent ist, nennt man divergent.

Beispiel einer divergenten Folge

Example (Divergente Folge)

Zu Beweisen ist, dass die Folge $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ divergiert.

Beispiel einer divergenten Folge

Example (Divergente Folge)

Zu Beweisen ist, dass die Folge $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ divergiert.
Beweis: Angenommen, die Folge (a_n) konvergiert gegen $g \in \mathbb{R}$.
Dann gibt es nach Definition zu $\epsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - g| < 1 \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Der Abstand von zwei aufeinander folgenden Gliedern ist gleich 2, denn entweder ist es $|(-1) - 1|$ oder $|1 - (-1)|$. Für $n \geq N$ gilt:

$$\begin{aligned} 2 &= |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - g) + (g - a_n)| \\ &\leq |a_{n+1} - g| + |a_n - g| < 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Widerspruch $2 < 2$, d.h. die Folge kann nicht gegen g konvergieren.

Grenzwert einer Folge

Theorem

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \tag{3}$$

Grenzwert einer Folge

Theorem

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \sqrt[n]{n} = 1 \tag{4}$$

Grenzwert einer Folge

Theorem

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \sqrt[n]{n} = 1 \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \sqrt[n]{p} = 1, p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \tag{5}$$

Grenzwert einer Folge

Theorem

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\ldots \tag{6}$$

Grenzwert einer Folge

Theorem

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \sqrt[n]{n} = 1 \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \sqrt[n]{p} = 1, p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\ldots \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{7}$$

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^r = (\lim_{n\to\infty} a_n)^r = a^r, r \in \mathbb{R}/0$

Bestimmung von Grenzwerten

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^r = (\lim_{n\to\infty} a_n)^r = a^r, r \in \mathbb{R}/0$
- $\lim_{n\to\infty} \log_d(a_n) = \log_d(\lim_{n\to\infty} a_n) = \log_d(a)$

Beispiel einer konvergenten Folge

Example (Konvergente Folge)

Zu zeigen ist, dass die Folge

$$a_n = 5\frac{2+3n}{2n} + \frac{1}{2}(3 - q^n),$$

mit $n \in \mathbb{N}, 0 < q < 1$ konvergiert.

Beschränktheit von Folgen

Definition (Beschränkte Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn alle a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ kleiner oder gleich (bzw. größer oder gleich) einer festen Zahl $M \in \mathbb{R}$ sind.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt* wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beschränktheit von Folgen

Definition (Beschränkte Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn alle a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ kleiner oder gleich (bzw. größer oder gleich) einer festen Zahl $M \in \mathbb{R}$ sind.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt* wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition (Monotone Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt
monoton wachsend, wenn $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$,
monoton fallend, wenn $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$,
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beschränktheit und Konvergenz von Folgen

Theorem (Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen)

Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert.

Arithmetische Folge

Definition

Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Arithmetische Folge

Definition

Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Es gilt:

- $a_{i+1} = a_i + d$ (rekursive Formel)

Arithmetische Folge

Definition

Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Es gilt:

- $a_{i+1} = a_i + d$ (rekursive Formel)
- $a_i = a_0 + id$ (explizite Formel)

Arithmetische Folge

Definition

Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Es gilt:

- $a_{i+1} = a_i + d$ (rekursive Formel)
- $a_i = a_0 + id$ (explizite Formel)
- $a_i = \dfrac{a_{i+1} + a_{i-1}}{2}$ (arithmetisches Mittel)

Beispiel einer arithmetischen Folge

Example (Arithmetische Folge)

$$a_0 = 2, d = 5$$

Beispiel einer arithmetischen Folge

Example (Arithmetische Folge)

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, d = 5 \\ a_1 &= 2 + 5 = 7 \\ a_2 &= a_1 + 5 = 12 \\ a_3 &= a_2 + 5 = 17 \\ a_4 &= \dots \end{aligned}$$

Geometrische Folge

Definition

Eine geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist. Es gilt also

$$a_i = a_0 \cdot q^{i-1}.$$

Geometrische Folge

Definition

Eine geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist. Es gilt also

$$a_i = a_0 \cdot q^{i-1}.$$

Es gilt weiter:

- $a_{i+1} = a_i \cdot q$ (rekursive Formel)

Beispiel einer geometrischen Folge

Example (Geometrische Folge)

Gegeben sei ein Folge mit

$$a_0 = 3, q = 2.$$

Dann erhält man die weiteren Folgeglieder:

Beispiel einer geometrischen Folge

Example (Geometrische Folge)

Gegeben sei ein Folge mit

$$a_0 = 3, q = 2.$$

Dann erhält man die weiteren Folgeglieder:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \cdot 2 = 6 \\ a_2 &= a_1 \cdot 2 = 12 \\ a_3 &= a_2 \cdot 2 = 24 \\ a_4 &= \ldots \end{aligned}$$

Contents

1. Grundlagen
   - Zahlenmengen
   - Grundrechenarten
   - Gleichungen und Ungleichungen
   - Intervalle
   - Vollständige Induktion
2. Komplexe Zahlen
   - Motivation
   - Definition und Darstellung
   - Grundbegriffe
   - Umwandlung
   - Rechnen mit komplexen Zahlen
3. Vektorrechnung
   - Motivation und Definition
   - Rechnen mit Vektoren
   - Linearkombinationen
   - Skalarprodukt
   - Vektorraum
   - Projektion
   - Kreuzprodukt
   - Geraden und Ebenen
4. Matrizen
   - Motivation
   - Grundlagen
   - Rechnen mit Matrizen
5. Lineare Gleichungssysteme
   - Inverse Matrix
   - Determinante
   - Gauß-Algorithmus
   - Eigenwerte, Eigenvektoren
6. Folgen
   - Zahlenfolgen
   - Grenzwert einer Folge
   - Spezielle Folgen
7. Reihen
   - Einführung
   - Definition
   - Konvergenzkriterien
8. Funktionen und Stetigkeit
   - Grundbegriffe
   - Trigonometrische Funktionen
   - Umkehrfunktionen
   - Exponential und Logarithmusfunktionen
   - Polynome
   - Stetigkeit
9. Differentialrechnung einer Veränderlichen
   - Grundlegende Definitionen
   - Anwendung der Differentialrechnung
   - Newtonverfahren
10. Integralrechnung einer Veränderlichen
    - Stammfunktion
    - Integral
    - Integrationsregeln
    - Integration gebrochen rationaler Funktionen
    - Bestimmtes Integral
    - Flächenberechnung
    - Uneigentliches Integral

Motivation

Example

100 Euro sind auf einem Festgeldkonto mit 5% Zinsen angelegt.

Motivation

Example

100 Euro sind auf einem Festgeldkonto mit 5% Zinsen angelegt.
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach einem Jahr?

Motivation

Example

100 Euro sind auf einem Festgeldkonto mit 5% Zinsen angelegt.
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach einem Jahr?
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach 10 Jahren? (mit Zinseszins)

Motivation

Example

100 Euro sind auf einem Festgeldkonto mit 5% Zinsen angelegt.
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach einem Jahr?
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach 10 Jahren? (mit Zinseszins)
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach unendliche vielen Jahren?

Motivation

Example

100 Euro sind auf einem Festgeldkonto mit 5% Zinsen angelegt.
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach einem Jahr?
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach 10 Jahren? (mit Zinseszins)
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach unendliche vielen Jahren?

Vermutung: Wenn die Folge nicht konvergiert, scheint die Summe der Folgenglieder auch nicht zu konvergieren.

Motivation

Example

100 Euro sind auf einem Festgeldkonto mit 5% Zinsen angelegt.
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach einem Jahr?
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach 10 Jahren? (mit Zinseszins)
Wie viel Geld ist auf dem Konto nach unendliche vielen Jahren?

Vermutung: Wenn die Folge nicht konvergiert, scheint die Summe der Folgenglieder auch nicht zu konvergieren.
Betrachten wir den Fall von konvergenten Folgen:

Example

Konvergiert die Summe der konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1$?

Motivation

Example

Betrachten wir die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{1}{n^2}.$$

Motivation

Example

Betrachten wir die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n^2}.$$

Die Folge konvergiert gegen 0. Wie verhält es sich mit der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}?$$

Motivation

Example

Betrachten wir die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n^2}.$$

Die Folge konvergiert gegen 0. Wie verhält es sich mit der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}?$$

Vermutung: Wenn die Folge gegen 0 konvergiert (eine Nullfolge ist), dann konvergiert auch die Summe der Folgenglieder.

Motivation

Example (Harmonische Reihe)

Betrachten wir die harmonische Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n}.$$

Motivation

Example (Harmonische Reihe)

Betrachten wir die harmonische Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n}.$$

Die Folge konvergiert gegen 0. Wie verhält es sich mit der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}?$$

Motivation

Example (Harmonische Reihe)

Betrachten wir die harmonische Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n}.$$

Die Folge konvergiert gegen 0. Wie verhält es sich mit der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}?$$

Beweis: Die Reihe divergiert (siehe Tafel).

Unendliche Reihe

Definition (Partialsummen und unendliche Reihe)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die endlichen Summen:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 = s_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\ \vdots\; & \quad \vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

heißen *Partial-* oder *Teilsummen*.
Eine Folge von Partialsummen wird *unendliche Reihe* genannt und mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Summen von Reihen

Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, ist durch

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

gegeben.

Summen von Reihen

Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, ist durch

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

gegeben.

Definition (Summe einer Reihe)

Konvergiert die Folge der Partialsummen s_m, so ist ihr Grenzwert s durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegeben und heißt dann Summe der Reihe. Wir schreiben dann

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Geometrische Reihen

Betrachten wir eine geometrische Folge mit einem konstanten a_0 und q und die dazugehörige geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k$$

Geometrische Reihen

Betrachten wir eine geometrische Folge mit einem konstanten a_0 und q und die dazugehörige geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Geometrische Reihen

Betrachten wir eine geometrische Folge mit einem konstanten a_0 und q und die dazugehörige geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Geometrische Reihen

Betrachten wir eine geometrische Folge mit einem konstanten a_0 und q und die dazugehörige geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Theorem (Unendliche geometrische Reihe)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert für alle $|q| < 1$ mit dem Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \frac{1}{1-q}.$$

Beispiel einer Reihe

Example

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 4k + 3}.$$

Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für $n \to \infty$.

Beispiel einer Reihe

Example

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 4k + 3}.$$

Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für $n \to \infty$. Dafür benötigen wir noch einige Aussagen über das Rechnen mit Reihen.

Konvergente Reihen

Theorem (Linearkombination konvergenter Reihen)

Seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \quad \textit{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$$

zwei konvergente Reihen reeller Zahlen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lambda a + \mu b$$

Beispiel einer Reihe

Example

Betrachten wir wieder die Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+4k+3}$.

Beispiel einer Reihe

Example

Betrachten wir wieder die Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+4k+3}$.
Mit Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+4k+3} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right] \end{aligned}$$

Es gilt also $\lim_{n\to\infty} s_n = 3/4$.

Konvergente Reihen

Definition (Absolut konvergent)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der absolut Beträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Konvergente Reihen

Definition (Absolut konvergent)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der absolut Beträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Theorem (Majoranten Kriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_n| \leq c_n \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Konvergente Reihen

Definition (Absolut konvergent)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der absolut Beträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Theorem (Majoranten Kriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_n| \leq c_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Bemerkung: Konvergiert eine Reihe absolut, so konvergiert sie bei jeder Umordnung der Reihe.

Beispiel Majoranten Kriterium

Example

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert.

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen ebenfalls konvergieren:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Konvergente Reihen

Theorem (Quotientenkriterium)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut, wenn eine Konstante* $C < 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq C$$

gilt.

Bemerkung:

Falls $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ gilt, so divergiert die Reihe.

Konvergente Reihen

Example (Quotientenkriterium)

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?

Konvergente Reihen

Example (Quotientenkriterium)

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?
Es gilt für $n \geq 3$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Konvergente Reihen

Example (Quotientenkriterium)

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?
Es gilt für $n \geq 3$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2}$$

Konvergente Reihen

Example (Quotientenkriterium)

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?
Es gilt für $n \geq 3$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Konvergente Reihen

Example (Quotientenkriterium)

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?
Es gilt für $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Konvergente Reihen

Example (Quotientenkriterium)

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?
Es gilt für $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} = C \end{aligned}$$

Konvergente Reihen

Example (Quotientenkriterium)

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$?
Es gilt für $n \geq 3$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} = C < 1\end{aligned}$$

Konvergente Reihen

Theorem (Wurzel Kriterium)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut, wenn eine Konstante* $C < 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq C$$

gilt.

Bemerkung:
Falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ gilt, so divergiert die Reihe.

Konvergente Reihen

Example (Wurzelkriterium)

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} ?$$

Konvergente Reihen

Example (Wurzelkriterium)

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} ?$$

Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Konvergente Reihen

Example (Wurzelkriterium)

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}?$$

Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Konvergente Reihen

Example (Wurzelkriterium)

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} ?$$

Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$$

Konvergente Reihen

Example (Wurzelkriterium)

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} ?$$

Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$$

Konvergente Reihen

Example (Wurzelkriterium)

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} ?$$

Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} < 1$$

Konvergente Reihen

Theorem (Leibnitzkriterium)

Eine alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert, wenn es eine natürliche Zahl* n_0 *gibt, sodass*

$$|a_{n+1}| \leq |a_n|$$

für alle $n > n_0$ *und wenn* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *gilt.*

Konvergente Reihen

Theorem (Leibnitzkriterium)

Eine alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert, wenn es eine natürliche Zahl* n_0 *gibt, sodass*

$$|a_{n+1}| \leq |a_n|$$

für alle $n > n_0$ *und wenn* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *gilt.*

Example

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ konvergiert, da $|a_{n+1}| = \frac{1}{n+2} \leq |a_n| = \frac{1}{n+1}$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Funktionen

Definition (Funktion)

Eine Abbildung oder Funktion f von einer Menge D in eine Menge W ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in W$ zuordnet.

Funktionen

Definition (Funktion)

Eine Abbildung oder Funktion f von einer Menge D in eine Menge W ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in W$ zuordnet.Man schreibt dafür:

$$\begin{aligned} f\ : D &\rightarrow W \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

und sagt: “x wird auf $f(x)$ abgebildet” bzw. “$f(x)$ ist das Bild (oder der Funktionswert) von x”.

Funktionen

Definition (Funktion)

Eine Abbildung oder Funktion f von einer Menge D in eine Menge W ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in W$ zuordnet.Man schreibt dafür:

$$\begin{aligned} f\ : D &\rightarrow W \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

und sagt: "x wird auf $f(x)$ abgebildet" bzw. "$f(x)$ ist das Bild (oder der Funktionswert) von x". Die Menge D heißt *Definitionsbereich* und die Menge W heißt *Wertebereich*.

Funktionen

Example

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - 3x^2}$

e) $f(x) = \ln x$

Geben Sie jeweils den Definitions und Wertebereich an.

Funktionen

Definition (Gerade und ungerade Funktionen)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gerade* Funktion, wenn

$$f(-x) = f(x)$$

gilt,

Funktionen

Definition (Gerade und ungerade Funktionen)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gerade* Funktion, wenn

$$f(-x) = f(x)$$

gilt, und *ungerade* Funktion, wenn

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt.

Funktionen

Example

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = |x|$
c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = x^3$
e) $f(x) = x^3 + x^2$

Bestimmen Sie die geraden bzw. ungeraden Funktionen.

Funktionen

Definition (Beschränktheit von Funktionen)

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt nach unten bzw. nach oben beschränkt, wenn ihr Wertebereich $W(f)$ nach unten bzw. nach oben beschränkt ist, d. h., wenn es eine Konstante c bzw. C derart gibt, dass

$$c \leq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq C \quad \text{für alle } x \in D(f)$$

gilt.

Funktionen

Definition (Beschränktheit von Funktionen)

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt nach unten bzw. nach oben beschränkt, wenn ihr Wertebereich $W(f)$ nach unten bzw. nach oben beschränkt ist, d. h., wenn es eine Konstante c bzw. C derart gibt, dass

$$c \leq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq C \quad \text{für alle } x \in D(f)$$

gilt. Existiert sogar eine Konstante K derart, dass

$$|f(x)| \leq K \quad \text{für alle} \quad x \in D(f)$$

gilt, wird die Funktion beschränkt genannt.

Funktionen

Example

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x - 5$

b) $f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \sin x$

Bestimmen Sie ob die Funktionen beschränkt sind.

Funktionen

Definition (Periodische Funktionen)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn mindestens ein $T \in R$, $T \neq 0$ existiert, für das

$$x \in D \Leftrightarrow x + T \in D$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$f(x + T) = f(x)$$

für alle $x \in D$ gilt. T wird als Periode der Funktion f bezeichnet.

Funktionen

Example

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \text{sign} x$

b) $f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2n, 2n+1) \\ -1, & x \in [2n-1, 2n) \end{cases} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$

d) $f(x) = \sin x$

Bestimmen Sie ob die Funktionen periodisch sind und falls ja, bestimmen Sie die Periode T.

Rechnen mit Funktionen

Seien f, g zwei Funktionen mit identischem Definitionsbereich. So kann man neue Funktionen wie folgt bilden:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{für } g(x)\neq 0\end{aligned}$$

Verkettung von Funktionen

Definition (Verkettung)

Seien $f : D_f \to M$ und $g : D_g \to N$ Funktionen. Die Hintereinanderausführung oder Verkettung von f und g ist die Funktion von $f \circ g : D_g \to M$ mit

$$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Damit die Hintereinanderausführung Sinn macht, muss $g(D_g) \subseteq D_f$ gelten.

Funktionen

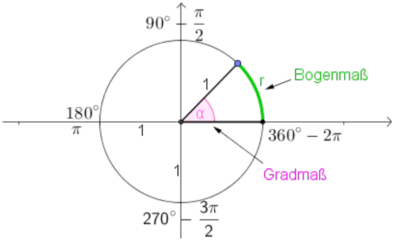
Example

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = x^2$$
$$h(x) = \sin x + \frac{1}{x}$$

Bestimmen Sie $f \circ g$, $g \circ f$ und $h \circ g \circ f$.

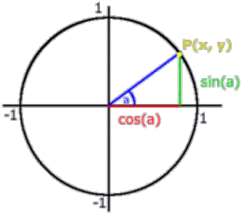
Trigonometrische Funktionen



Definition (Bogenmaß)

Das Bogenmaß x eines Winkels α (in °) ist die Länge des Bogens, welcher dem Winkel α im Einheitskreis gegenüber liegt.

Trigonometrische Funktionen



Definition (Trigonometrisch Funktion)

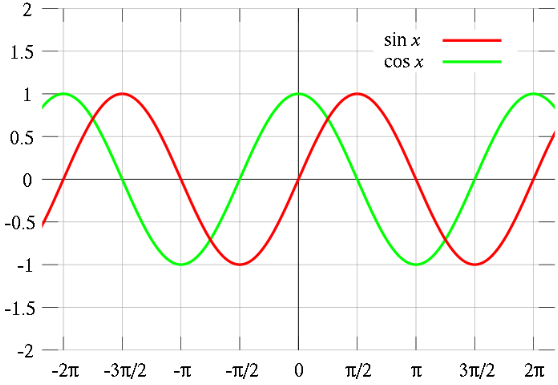
Sei a die Bogenlänge am Einheitskreis, die vom Punkt $(1, 0)$ beginnend entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen wird, und bei $P = (x, y)$ endet. Dann definieren wir

$$\sin(a) = y \quad \text{bzw.} \quad \cos(a) = x$$

und nennen diese Funktionen Sinus bzw. Kosinus.

Die sin und cos Funktionen

Um $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zu definieren, lassen wir auch Mehrfachumdrehungen zu ($x = k2\pi$ entspricht k vollen Umdrehungen, falls $k < 0$ ist, so wurde im Uhrzeigersinn gedreht).



sin und cos als Reihendarstellung

Heutzutage kann es bequem sein, die beiden Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch unendliche Reihen wie folgt zu definieren:

Definition (Analytische Definition)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Rechenregeln

Lemma

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(-x) = \cos x \quad \textit{und} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Rechenregeln

Lemma

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(-x) = \cos x \quad \textit{und} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

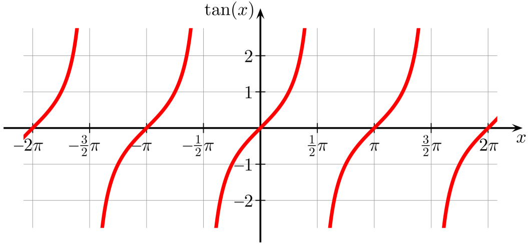
$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Lemma

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

Tangens



Definition

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ setzt man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Motivation

Wir haben bereits Rechenregeln für

- das Addieren und Subtrahieren von Funktionen (Inverse bzgl. der Addition ist $f_+^{-1}(x) = -f(x)$).

Motivation

Wir haben bereits Rechenregeln für

- das Addieren und Subtrahieren von Funktionen (Inverse bzgl. der Addition ist $f_{+}^{-1}(x) = -f(x)$).
- das Verketten von Funktionen

Motivation

Wir haben bereits Rechenregeln für

- das Addieren und Subtrahieren von Funktionen (Inverse bzgl. der Addition ist $f_{+}^{-1}(x) = -f(x)$).
- das Verketten von Funktionen

Motivation

Wir haben bereits Rechenregeln für

- das Addieren und Subtrahieren von Funktionen (Inverse bzgl. der Addition ist $f_+^{-1}(x) = -f(x)$).
- das Verketten von Funktionen

Neutrales Element bzgl. der Addition ($f(x) = 0$) und der Verkettung $f(x) = x$ sind bekannt.

Motivation

Wir haben bereits Rechenregeln für

- das Addieren und Subtrahieren von Funktionen (Inverse bzgl. der Addition ist $f_+^{-1}(x) = -f(x)$).
- das Verketten von Funktionen

Neutrales Element bzgl. der Addition ($f(x) = 0$) und der Verkettung $f(x) = x$ sind bekannt.
Welche Operation fehlt? (Wie war es bei Matrizen, etc.?)

Motivation

Wir haben bereits Rechenregeln für

- das Addieren und Subtrahieren von Funktionen (Inverse bzgl. der Addition ist $f_+^{-1}(x) = -f(x)$).
- das Verketten von Funktionen

Neutrales Element bzgl. der Addition ($f(x) = 0$) und der Verkettung $f(x) = x$ sind bekannt.
Welche Operation fehlt? (Wie war es bei Matrizen, etc.?)
Das Inverse (f^{-1}) bzgl. der Verkettung einer Funktion fehlt.

Eigenschaften von Abbildungen

Definition (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv)

Sei $f : D \to W$ eine Abbildung

- f heißt *injektiv*, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in D$.

Eigenschaften von Abbildungen

Definition (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv)

Sei $f : D \to W$ eine Abbildung

- f heißt *injektiv*, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in D$.
- f heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von W das Bild eines Elements aus D ist, kurz $f(D) = W$.

Eigenschaften von Abbildungen

Definition (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv)

Sei $f : D \to W$ eine Abbildung

- f heißt *injektiv*, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in D$.
- f heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von W das Bild eines Elements aus D ist, kurz $f(D) = W$.
- f heißt *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bijektiv, injektiv, surjektiv

Example

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$
d) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ mit $f(x) = \sin x$
e) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$

Bestimmen Sie welche der Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

Monotonie

Definition

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to M \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion.

- f heißt streng monoton wachsend, wenn gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

- f heißt streng monoton fallend, wenn gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

- Wenn anstellen von $<$ und $>$ (bei den Funktionswerten) jeweils $\leq$ bzw. $\geq$ gilt, dann nennt man die Funktion nur monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Monotonie

Example

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$
d) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \to [-1, 1]$ mit $f(x) = \sin x$

Bestimmen Sie welche der Funktionen (streng) monoton wachsend oder fallend sind.

Bijektive Funktionen

Theorem

Eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to M \subseteq \mathbb{R}$ *ist injektiv, wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Gilt weiter, dass* $f(D) = M$ *ist (Surjektivität), so ist die Funktion* f *bijektiv.*

Bijektive Funktionen

Theorem

Eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to M \subseteq \mathbb{R}$ ist injektiv, wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Gilt weiter, dass $f(D) = M$ ist (Surjektivität), so ist die Funktion f bijektiv.

Alle notwendigen Grundlagen für die Definition der Inversen bzgl. Verkettung sind definiert, wir können die Inverse einer Funktion definieren.

Umkehrfunktion

Definition (Umkehrfunktion)

Ist die Funktion $f : D \to W$ bijektiv, dann heißt die Funktion, die jedem $y \in W$ das eindeutig bestimmte $x \in D$ mit $y = f(x)$ zuordnet, die *Umkehrfunktion* (oder inverse Funktion) von f. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet.

Umkehrfunktion

Definition (Umkehrfunktion)

Ist die Funktion $f : D \to W$ bijektiv, dann heißt die Funktion, die jedem $y \in W$ das eindeutig bestimmte $x \in D$ mit $y = f(x)$ zuordnet, die *Umkehrfunktion* (oder inverse Funktion) von f. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet.

$f^{-1} : W \to D$ hat folgende Eigenschaft:
$f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $y = f(x)$.
Insbesondere gilt

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

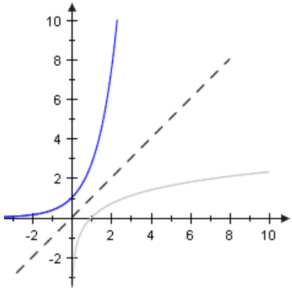
für alle $x \in D$ bzw. $y \in W$.

Umkehrfunktion der Trigonometrischen Funktionen

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen Arcus-Funktionen. Für die Existenz der Umkehrfunktionen ist es notwendig, den Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen einzuschränken.

trig. Funktion	eing. Def. Bereich	Umkehrfunktion	Def. Bereich
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin x$	$[-1;1]$
$\cos x$	$[0;\pi]$	$\arccos x$	$[-1;1]$
$\tan x$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$[0;\pi]$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$

Exponential und Logarithmus



Theorem

Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *gegeben durch* $f(x) = a^x$ *ist für* $0 < a < 1$ *streng monoton fallend und für* $1 < a$ *streng monoton wachsend.*
Ihre Umkehrfunktion wird als Logarithmusfunktion *bezeichnet:*
$f^{-1} : (0, \infty) \to$ *mit* $f^{-1}(x) = \log_a(x)$*.*

Polynome

Definition (Polynom)

Ein Polynom ist eine Funktion $P : D \to W$, der Form

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$.

Polynome

Definition (Polynom)

Ein Polynom ist eine Funktion $P : D \to W$, der Form

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$.
Der Grad des Polynoms ($\deg P$ oder $\mathrm{grad} P$) ist gegeben durch den höchsten Koeffizienten n für den $a_n \neq 0$ gilt.

Polynome

Definition (Polynom)

Ein Polynom ist eine Funktion $P : D \to W$, der Form

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$.
Der Grad des Polynoms ($\deg P$ oder $\operatorname{grad} P$) ist gegeben durch den höchsten Koeffizienten n für den $a_n \neq 0$ gilt.
Eine Nullstelle ist durch ein x gegeben für das $P(x) = 0$ gilt.

Polynome

Definition (Produktdarstellung)

Gegeben sei ein Polynom $P(x)$ vom Grad n mit den Nullstellen x_0 bis x_n, dann ist die Produktdarstellung von $P(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P(x) &= \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \\ &= (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n). \end{aligned}$$

Polynome

Definition (Produktdarstellung)

Gegeben sei ein Polynom $P(x)$ vom Grad n mit den Nullstellen x_0 bis x_n, dann ist die Produktdarstellung von $P(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P(x) &= \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \\ &= (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n). \end{aligned}$$

Example

$$P(x) = 1 \cdot x^3 + (-4) \cdot x^2 + 5 \cdot x^1 + (-2) \cdot x^0 = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)$$

Produktdarstellung Polynom

Example

Geben Sie zu den folgenden Polynomen die Produktdarstellung an:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x^2 + 14x - 15$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

d) $f(x) = 1$

Gebrochen rationale Funktionen

Definition (Gebrochen rationale Funktion)

Seien $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$ und $0 \leq j \leq m$. Die Funktion

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

heißt gebrochen rationale Funktion.

$n < m$: echt gebrochen rational

$n \geq m$: unecht gebrochen rational

Verhalten im Unendlichen

Für das Verhalten von rational gebrochenen Funktionen im Unendlichen kann die folgende Regel verwendet werden:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} \right) x^{n-m}$$

wobei a_n und b_m jeweils die höchsten nicht verschwindenden Koeffizienten sind.

Verhalten im Unendlichen

Für das Verhalten von rational gebrochenen Funktionen im Unendlichen kann die folgende Regel verwendet werden:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} \right) x^{n-m}$$

wobei a_n und b_m jeweils die höchsten nicht verschwindenden Koeffizienten sind.

Example

Bestimmen Sie das Verhalten von

$$p(x) = \frac{ax^3 - 5x^2 - 4}{bx^3 - 2x^2 + x - 2}$$

für $a = 3, b = 4$ und $a = 3, b = 0$.

Aysymptote

Definition (Asymptote)

Sei f eine Funktion, g eine Gerade und $d(\cdot,\cdot)$ der Abstand, dann heißt g Asymptote von f falls

$$\lim_{P\in g, |P|\to\infty} d(P,f) = 0$$

gilt. D.h. der Graph der Funktion nähert sich im unendlichen der Asymptote an, bzw. die Asymptote ist die Tangente an den Graphen der Funktion.

Polstellen einer Funktion

Definition (Polstellen)

Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte unbeschränkt wachsen oder fallen, heißen Pole oder Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$.

Polstellen einer Funktion

Definition (Polstellen)

Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte unbeschränkt wachsen oder fallen, heißen Pole oder Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$.

Example

Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ hat eine Polstelle bei $x = 0$.

Polstellen und Definitionslücken

Definition (Pol der k-ten Ordnung)

x ist ein Pol k-ter Ordnung $\Leftrightarrow P_n(x) \neq 0$ und $Q_m(x) = 0$ ist eine Nullstelle von k-ter Ordnung.

Polstellen und Definitionslücken

Definition (Pol der k-ten Ordnung)

x ist ein Pol k-ter Ordnung $\Leftrightarrow P_n(x) \neq 0$ und $Q_m(x) = 0$ ist eine Nullstelle von k-ter Ordnung.

Definition (Nullstelle der k-ten Ordnung)

x_i ist eine Nullstelle k-ter Ordnung $\Leftrightarrow P(x)$ kann geschrieben werden als $P_n(x) = (x - x_i)^k \cdot g(x)$

Polstellen und Definitionslücken

Definition (Pol der k-ten Ordnung)

x ist ein Pol k-ter Ordnung $\Leftrightarrow P_n(x) \neq 0$ und $Q_m(x) = 0$ ist eine Nullstelle von k-ter Ordnung.

Definition (Nullstelle der k-ten Ordnung)

x_i ist eine Nullstelle k-ter Ordnung $\Leftrightarrow P(x)$ kann geschrieben werden als $P_n(x) = (x - x_i)^k \cdot g(x)$

Definition (Stetig hebbare Definitionslücke)

x ist eine Lücke $\Leftrightarrow$ ($P_n(x) = 0$ ist Nullstelle der Ordnung k_1 und $Q_m(x) = 0$ ist Nullstelle der Ordnung k_2 und es gilt $k_1 \geq k_2$)

Gebrochen rationale Funktion

Example

Gegeben sei die Funktion

$$p(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}.$$

Bestimmen Sie die Polstellen und stetig hebbare Definitionslücken.

Definitionsbereich bei Polen und Definitionslücken

Der Definitionsbereich D einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole}, \text{Lücken}\}$$

Definitionsbereich bei Polen und Definitionslücken

Der Definitionsbereich D einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole}, \text{Lücken}\}$$

Bestimmung der Nullstellen und Pole einer gebrochen rationalen Funktion:

Definitionsbereich bei Polen und Definitionslücken

Der Definitionsbereich D einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole, Lücken}\}$$

Bestimmung der Nullstellen und Pole einer gebrochen rationalen Funktion:

1. Zerlegung des Zähler- und Nennerpolynoms in Linearfaktoren und Kürzung gemeinsamer Faktoren (Schließung der Lücken).

Definitionsbereich bei Polen und Definitionslücken

Der Definitionsbereich D einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole}, \text{Lücken}\}$$

Bestimmung der Nullstellen und Pole einer gebrochen rationalen Funktion:

1. Zerlegung des Zähler- und Nennerpolynoms in Linearfaktoren und Kürzung gemeinsamer Faktoren (Schließung der Lücken).
2. Reelle Linearfaktoren im Zähler sind reelle Nullstellen.
   Reelle Linearfaktoren im Nenner sind reelle Pole.
3. Bestimmung von Fortsetzungen $\tilde{f}$ von f auf hebbaren Definitionslücken.

Grenzwerte

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$ und in einer Umgebung von x_0 definiert.
Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D, x_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g_r \quad \text{(rechtseitiger Grenzwert).}$$

Für jede Folge $(\widetilde{x_n})$ mit $\widetilde{x_n} \in D, \widetilde{x_n} < x_0$ und $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x_n}) = g_L \quad \text{(linkseitiger Grenzwert).}$$

Gilt $g_r = g_L$, so existiert der Grenzwert g.

Grenzwerte

Bei den Grenzwerten kann man verkürzt

- für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = g_r$$

- für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = g_L$$

schreiben.

Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt stetig in Punkt x_0 falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heißt stetig in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Stetige Funktionen

Theorem

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} f + g &: D \to \mathbb{R}, \\ \lambda f &: D \to \mathbb{R}, \\ fg &: D \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

im Punkt x_0 stetig. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$$

in x_0 stetig. Dabei ist $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Definition

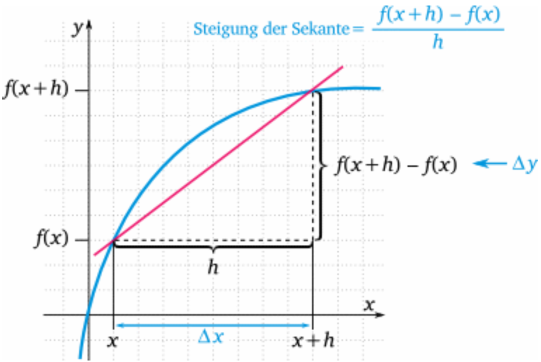
Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in einem Punkt $x \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt x (man schreibt auch $\frac{\mathbf{d}f(x)}{\mathbf{d}x}$). Die Funktion f heißt differenzierbar in D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Geometrische Interpretation



Beim Grenzübergang ($h \to 0$) geht die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ über.

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.$

$$f'(x) \quad =$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \end{aligned}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = \end{aligned}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x
\end{aligned}
$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$

$$f'(x) \quad =$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right)$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \end{aligned}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}.$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \\
&= (-1)\cdot x^{-2}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x.$

$$f'(x) =$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^x.$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^x.$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^x.$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} =
\end{aligned}
$$

Beispiel

Example

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^x.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Theorem

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ differenzierbar, so ist sie auch in a stetig.

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C$, $f'(x) = 0$

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C$, $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C$, $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = 1/x^n$, $f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C$, $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = 1/x^n$, $f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$
4. $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha a x^{\alpha - q}$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C$, $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = 1/x^n$, $f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$
4. $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha a x^{\alpha-q}$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
5. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$, für $x > 0$

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C$, $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = 1/x^n$, $f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$
4. $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha a x^{\alpha - q}$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
5. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$, für $x > 0$
6. $f(x) = \log_a x$, $f'(x) = 1/(x \ln a)$, für $x > 0$

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C$, $f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = 1/x^n$, $f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$
4. $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha a x^{\alpha-q}$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
5. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$, für $x > 0$
6. $f(x) = \log_a x$, $f'(x) = 1/(x \ln a)$, für $x > 0$
7. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$

Wichtige Ableitungen

Allgemein

1. $f(x) = C,\ f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = 1/x^n,\ f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$
4. $f(x) = x^\alpha,\ f'(x) = \alpha a x^{\alpha - q}$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
5. $f(x) = \ln x,\ f'(x) = 1/x$, für $x > 0$
6. $f(x) = \log_a x,\ f'(x) = 1/(x \ln a)$, für $x > 0$
7. $f(x) = \mathrm{e}^x,\ f'(x) = \mathrm{e}^x$
8. $f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x \ln a$

Wichtige Ableitungen

Trigonometrische Funktionen

- $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x$

Wichtige Ableitungen

Trigonometrische Funktionen

- $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x,\ f'(x) = 1/(\cos^2 x)$ für $x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = \cot x,\ f'(x) = -1/(\sin^2 x)$, für $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Wichtige Ableitungen

Trigonometrische Funktionen

- $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x,\ f'(x) = 1/(\cos^2 x)$ für $x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = \cot x,\ f'(x) = -1/(\sin^2 x)$, für $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = \arcsin x,\ f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$, für $-1 < x < 1$
- $f(x) = \arccos x,\ f'(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$, für $-1 < x < 1$
- $f(x) = \arctan x,\ f'(x) = 1/(1 + x^2)$
- $f(x) = \text{arccot}\ x,\ f'(x) = -1/(1 + x^2)$

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

Theorem

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g,\ \lambda f,\ fg : D \to \mathbb{R}$$

in x differenzierbar und es gelten die Rechenregeln:

a) *Linearität:*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x),\\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x).\end{aligned}$$

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

Theorem (Fortsetzung)

b) *Produktregel:*

$$(fg)'(x) \;=\; f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

c) *Quotientenregel: Ist $g(a) \neq 0$ für alle $a \in D$, so ist auch die Funktion $(f/g) : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \;=\; \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Umkehrfunktion

Theorem

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $\varphi = f^{-1} : D^* \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion, wobei $D^* = f(D)$.
Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

Kettenregel

Theorem

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Die Funktion f sei im Punkt $x \in D$ differenzierbar und g sei in $y := f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

im Punkt x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) \;=\; g'(f(x))f'(x).$$

Ableitung höherer Ordnung

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Falls die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ ihrerseits im Punkt $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{\mathbf{d}^2 f(x)}{\mathbf{d}x^2} := f''(x) := (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f in x.
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ k-mal differenzierbar ist. Sie heißt k-mal stetig differenzierbar in D, wenn überdies die k-te Ableitung $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ in D stetig ist.

Taylorreihe

Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktionen mit $a \in D$. Dann heißt

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die Taylor-Reihe *von f im Entwicklungspunkt a.*

In den meisten Fällen wird $T_i f(x; a) = \sum_{k=0}^{i} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ zur Berechnung verwendet.

Regel von Bernoulli und l'Hospital

Theorem

Auf dem Intervall $I =]a, b[$ *seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *zwei differenzierbare Funktionen. Es gilt* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *und es existiere der Limes*

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}.$$

Regel von Bernoulli und l'Hospital

Theorem

Auf dem Intervall $I =]a, b[$ *seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *zwei differenzierbare Funktionen. Es gilt* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *und es existiere der Limes*

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}.$$

Dann gelten die folgenden Regeln von de l'Hospital:

1) *Falls* $\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} f(x) = 0$ *und* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *dann gilt,*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Regel von Bernoulli und l'Hospital

Theorem (Fortsetzung)

2) *Falls* $\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ *und* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *dann gilt ebenfalls,*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Regel von Bernoulli und l'Hospital

Theorem (Fortsetzung)

2) *Falls* $\lim_{x \to b} g(x) = \lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ *und* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in I$ *dann gilt ebenfalls,*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

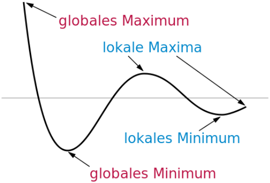
Bemerkung 1: Die Regel gilt auch für $b \to \infty$.
Bemerkung 2: Alle anderen unbestimmten Formen lassen sich umformen, so dass die Regel 1 oder 2 angewendet werden kann.

Umformungstabelle

Die folgende Tabelle zeigt wie unbestimmte Ausdrücke umgeformt werden können um die Regel von l'Hospital zu verwenden.

Funktion $f(x)$	$\lim_{x \to b} f(x)$	Elementare Umformung
$g(x) \cdot h(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$	$\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$ bzw. $\frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$g(x) - h(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)h(x)}}$
$g(x)^{h(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{h(x) \cdot \ln g(x)}$

Maximum und Minimum

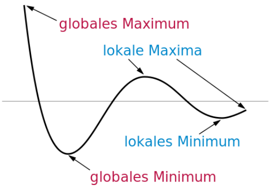


Definition (lokales Minimum und Maximum)

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe in $x_n \in]a,b[$ ein lokales Maximum (Minimum), wenn wir eine Umgebung $U_\epsilon(x_n)$ von x_n finden, so dass

$$f(x) \le f(x_n) \quad (\text{bzw. } f(x) \ge f(x_n)) \text{ für alle } x \in U_\epsilon(x_n).$$

Maximum und Minimum



Definition (Globales Minimum und Maximum)

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe in $x_n \in]a, b[$ ein globales Maximum (Minimum), wenn

$$f(x) \leq f(x_n) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_n))$$

für alle $x \in]a, b[$ gilt.

Notwendige Bedingungen für ein Extremum

Theorem

Die Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *besitze im Punkt* $x \in]a, b[$ *ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) und sei in* x *differenzierbar. Dann ist* $f'(x) = 0$.

Notwendige Bedingungen für ein Extremum

Theorem

Die Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in]a, b[$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.

Bemerkung: $f'(x) = 0$ ist nur eine *notwendige*, aber nicht *hinreichende* Bedingung für ein lokales Extremum.

Notwendige Bedingungen für ein Extremum

Theorem

Die Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in]a, b[$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.

Bemerkung: $f'(x) = 0$ ist nur eine *notwendige*, aber nicht *hinreichende* Bedingung für ein lokales Extremum.

Example

Für die Funktion $f(x) = x^3$ gilt z.B. $f'(0) = 0$, sie besitzt aber in 0 kein lokales Extremum.

Konvex und konkav

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei die Krümmung der Kurve.

Konvex und konkav

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei die Krümmung der Kurve.

Definition (Konvex)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Konvex und konkav

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei die Krümmung der Kurve.

Definition (Konvex)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) > 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ zunimmt.

Konvex und konkav

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei die Krümmung der Kurve.

Definition (Konvex)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) > 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ zunimmt.

Definition (Konkav)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konkav, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.

Konvex und konkav

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei die Krümmung der Kurve.

Definition (Konvex)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) > 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ zunimmt.

Definition (Konkav)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konkav, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) < 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ abnimmt.

Hinreichende Bedingung für ein Extremum

Theorem

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ ein differenzierbare Funktion. Im Punkt $x \in]a, b[$ sei f zweimal differenzierbar und es gelte

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) > 0).$$

Dann besitzt f in x ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Hinreichende Bedingung für ein Extremum

Theorem

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ ein differenzierbare Funktion. Im Punkt $x \in]a,b[$ sei f zweimal differenzierbar und es gelte

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) > 0).$$

Dann besitzt f in x ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Bemerkung: Dieser Satz gibt nur eine *hinreichende*, aber nicht *notwendige* Bedingung für ein Extremum an.

Hinreichende Bedingung für ein Extremum

Theorem

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ ein differenzierbare Funktion. Im Punkt $x \in]a, b[$ sei f zweimal differenzierbar und es gelte

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) > 0).$$

Dann besitzt f in x ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Bemerkung: Dieser Satz gibt nur eine *hinreichende*, aber nicht *notwendige* Bedingung für ein Extremum an.

Example

Die Funktion $f(x) = x^4$ besitzt zum Beispiel für $x = 0$ ein strenges lokales Minimum. Es gilt jedoch $f''(0) = 0$.

Wendepunkt

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man sagt f habe in x_0 einen Wendepunkt, wenn es Intervalle $]\alpha, x_0[$ und $]x_0, \beta[$ gibt, so dass entweder

- f in $]\alpha, x_0[$ konvex und in $]x_0, \beta[$ konkav ist, oder dass
- f in $]\alpha, x_0[$ konkav und in $]x_0, \beta[$ konvex ist.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Funktion f im Punkt x_0 das Vorzeichen seiner Krümmung ändert.

Wendepunkt

Definition

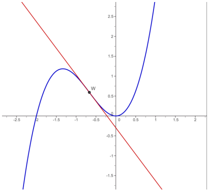
Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man sagt f habe in x_0 einen Wendepunkt, wenn es Intervalle $]\alpha, x_0[$ und $]x_0, \beta[$ gibt, so dass entweder

- f in $]\alpha, x_0[$ konvex und in $]x_0, \beta[$ konkav ist, oder dass
- f in $]\alpha, x_0[$ konkav und in $]x_0, \beta[$ konvex ist.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Funktion f im Punkt x_0 das Vorzeichen seiner Krümmung ändert.

Bemerkung: Das heißt, dass der Graph der Funktion f im Punkt x_0 das Vorzeichen seiner Krümmung ändert.

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt



Theorem

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$. Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und es gilt ferner

$$f''(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

dann hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Sattelpunkt oder Extremum

Definition (Sattelpunkt)

Sei f eine Funktion mit einem Wendepunkt in x_0 und weiter gelte $f'(x_0) = 0$, dann nennen wir diesen Wendepunkt einen Sattelpunkt.

Sattelpunkt oder Extremum

Definition (Sattelpunkt)

Sei f eine Funktion mit einem Wendepunkt in x_0 und weiter gelte $f'(x_0) = 0$, dann nennen wir diesen Wendepunkt einen Sattelpunkt.

Theorem

Sei $f'(x_0) = 0$ und die Nächstfolgende nicht *veschwindende Ableitung $f^{(n)}(x_0)$.*

- *Ist n gerade, so gilt:*
  $f(x_0)$ ist ein relatives Minimum für $f^{(n)}(x_0) > 0$
  $f(x_0)$ ist ein relatives Maximum für $f^{(n)}(x_0) < 0$
- *Ist n ungerade, so gilt:*
  $f(x_0)$ hat einen Sattelpunkt.

Motivation

Example

Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms:

$$p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$$

Gesucht ist also $p(x) = 0$.

Motivation

Example

Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms:

$$p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$$

Gesucht ist also $p(x) = 0$.
Für quadratische Gleichungen haben wir die (p, q)-Formel. Wie gehen wir mit höherer Ordnung um?

Motivation

Example

Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms:

$$p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$$

Gesucht ist also $p(x) = 0$.
Für quadratische Gleichungen haben wir die (p, q)-Formel. Wie gehen wir mit höherer Ordnung um?
Lösungsidee: Newton Verfahren.

Idee

Example

Gegeben sei $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$ und wir suchen ein x mit $p(x) = 0$.

Idee

Example

Gegeben sei $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$ und wir suchen ein x mit $p(x) = 0$.
Wir raten als Startwert $x_0 = 1$.

Idee

Example

Gegeben sei $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$ und wir suchen ein x mit $p(x) = 0$.
Wir raten als Startwert $x_0 = 1$.
$p(1) = 2$ folglich ist x_0 keine Nullstelle,

Idee

Example

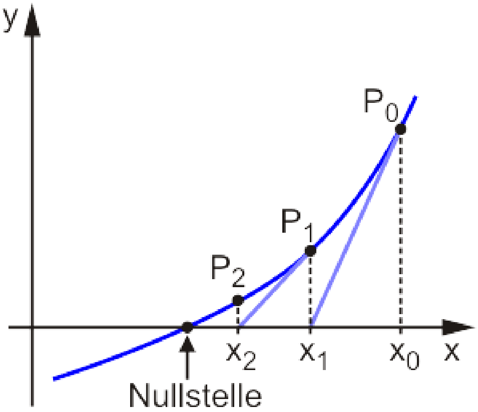
Gegeben sei $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$ und wir suchen ein x mit $p(x) = 0$.
Wir raten als Startwert $x_0 = 1$.
$p(1) = 2$ folglich ist x_0 keine Nullstelle,die Ableitung in x_0 liefert uns $p'(x_0) = -22$. Folglich ist die Funktion fallend und es macht Sinn ein weiteres $x_1 > x_0$ zu betrachten.
Zum Beispiel $x_1 = 1,5$ oder ist $x_1 = 20$ besser?

Idee

Example

Gegeben sei $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 30$ und wir suchen ein x mit $p(x) = 0$.
Wir raten als Startwert $x_0 = 1$.
$p(1) = 2$ folglich ist x_0 keine Nullstelle,die Ableitung in x_0 liefert uns $p'(x_0) = -22$. Folglich ist die Funktion fallend und es macht Sinn ein weiteres $x_1 > x_0$ zu betrachten.
Zum Beispiel $x_1 = 1,5$ oder ist $x_1 = 20$ besser?
Wie finden wir eine sinnvolle Schrittweite für x_1?

Newton Verfahren



Newton-Verfahren

Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien weiter ihre Nullstellen als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ gesucht. Das Newton-Verfahren löst diese Gleichung iterativ und startet mit einem Näherungswert x_0. In jedem Iterationsschritt x_n wir der Graph von f durch die Tangenten an $f(x_n)$ ersetzt. Der Schnittpunkt der Tagente mit der x-Achse ist das neue x_{n+1}.

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Newton-Verfahren

Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien weiter ihre Nullstellen als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ gesucht. Das Newton-Verfahren löst diese Gleichung iterativ und startet mit einem Näherungswert x_0. In jedem Iterationsschritt x_n wir der Graph von f durch die Tangenten an $f(x_n)$ ersetzt. Der Schnittpunkt der Tagente mit der x-Achse ist das neue x_{n+1}.

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bemerkung: Nicht für jeden Startwert x_0 konvergiert das Verfahren. Die Herausforderung ist einen guten Startwert zu wählen.

Konvergenzsatz

Falls die, durch diese Iterationsvorschrift gebildete Folge x_n, wohldefiniert ist und gegen ein $\xi \in [a, b]$ konvergiert, so folgt, dass $f(\xi) = 0$ gilt.

Konvergenzsatz

Falls die, durch diese Iterationsvorschrift gebildete Folge x_n, wohldefiniert ist und gegen ein $\xi \in [a,b]$ konvergiert, so folgt, dass $f(\xi) = 0$ gilt.

Theorem

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine differenzierbare konvexe Funktion mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$. *Dann gilt*

a) *Es gibt genau ein* $\xi \in]a,b[$ *mit* $f(\xi) = 0$.

b) *Ist* $x_0 \in [a,b]$ *ein beliebiger Startpunkt mit* $f(x_0) \geq 0$, *so ist die Folge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

Contents

1 Grundlagen
- Zahlenmengen
- Grundrechenarten
- Gleichungen und Ungleichungen
- Intervalle
- Vollständige Induktion

2 Komplexe Zahlen
- Motivation
- Definition und Darstellung
- Grundbegriffe
- Umwandlung
- Rechnen mit komplexen Zahlen

3 Vektorrechnung
- Motivation und Definition
- Rechnen mit Vektoren
- Linearkombinationen
- Skalarprodukt
- Vektorraum
- Projektion
- Kreuzprodukt
- Geraden und Ebenen

4 Matrizen
- Motivation
- Grundlagen
- Rechnen mit Matrizen

5 Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrix
- Determinante
- Gauß-Algorithmus
- Eigenwerte, Eigenvektoren

6 Folgen
- Zahlenfolgen
- Grenzwert einer Folge
- Spezielle Folgen

7 Reihen
- Einführung
- Definition
- Konvergenzkriterien

8 Funktionen und Stetigkeit
- Grundbegriffe
- Trigonometrische Funktionen
- Umkehrfunktionen
- Exponential und Logarithmusfunktionen
- Polynome
- Stetigkeit

9 Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Grundlegende Definitionen
- Anwendung der Differentialrechnung
- Newtonverfahren

10 Integralrechnung einer Veränderlichen
- Stammfunktion
- Integral
- Integrationsregeln
- Integration gebrochen rationaler Funktionen
- Bestimmtes Integral
- Flächenberechnung
- Uneigentliches Integral

Stammfunktion

Wir wollen zeigen, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, was in vielen Fällen die Möglichkeit zur Berechnung des Integrals liefert.

Example

Zu einer gegebenen Funktion f wird eine Funktion F gesucht, deren erste Ableitung $F' = f$ ist.

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$2x$	x^2
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

Stammfunktion

Definition

Eine Differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Stammfunktion

Definition

Eine Differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Theorem

Sei $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x) = F'(x)$ dann folgt daraus, dass $F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Unbestimmtes Integral

Definition

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion f heißt *unbestimmtes Integral*,

$$\int f(x)\, \mathbf{d}x = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f ist der *Integrand* und die Konstante C wird *Integrationskonstante* genannt.

Grundintegrale

$$\int a \, \mathbf{d}x \quad = \quad ax + C$$

Grundintegrale

$$\int a \, \mathbf{d}x = ax + C$$

$$\int x^n \, \mathbf{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

Grundintegrale

$$\int a\,\mathbf{d}x = ax + C$$

$$\int x^n\,\mathbf{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathbf{d}x = \ln|x| + C; \quad x \neq 0$$

Grundintegrale

$$\int a \, \mathbf{d}x = ax + C$$

$$\int x^n \, \mathbf{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathbf{d}x = \ln|x| + C; \quad x \neq 0$$

$$\int e^x \, \mathbf{d}x = e^x + C$$

Grundintegrale

$$\int a \; \mathbf{d}x = ax + C$$

$$\int x^n \; \mathbf{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \; \mathbf{d}x = \ln|x| + C; \quad x \neq 0$$

$$\int e^x \; \mathbf{d}x = e^x + C$$

$$\int a^x \; \mathbf{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

Grundintegrale

$$
\begin{aligned}
\int a \,\mathbf{d}x &= ax + C \\
\int x^n \,\mathbf{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \,\mathbf{d}x &= \ln|x| + C; \quad x \neq 0 \\
\int e^x \,\mathbf{d}x &= e^x + C \\
\int a^x \,\mathbf{d}x &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \\
\int \sin x \,\mathbf{d}x &= -\cos x + C
\end{aligned}
$$

Grundintegrale

$$
\begin{aligned}
\int a \,\mathbf{d}x &= ax + C \\
\int x^n \,\mathbf{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \,\mathbf{d}x &= \ln|x| + C; \quad x \neq 0 \\
\int e^x \,\mathbf{d}x &= e^x + C \\
\int a^x \,\mathbf{d}x &= \frac{1}{\ln a} a^x + C \\
\int \sin x \,\mathbf{d}x &= -\cos x + C \\
\int \cos x \,\mathbf{d}x &= \sin x + C
\end{aligned}
$$

Grundintegrale

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, \mathbf{d}x \quad = \quad \tan x + C; \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$$

Grundintegrale

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathbf{d}x &= \tan x + C; \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathbf{d}x &= -\cot x + C; \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots
\end{aligned}$$

Grundintegrale

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathbf{d}x &= \tan x + C; \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathbf{d}x &= -\cot x + C; \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathbf{d}x &= \arcsin x + C; \quad |x| < 1
\end{aligned}$$

Grundintegrale

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathbf{d}x = \tan x + C; \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathbf{d}x = -\cot x + C; \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathbf{d}x = \arcsin x + C; \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathbf{d}x = \arctan x + C$$

Grundintegrale

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathbf{d}x = \tan x + C; \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathbf{d}x = -\cot x + C; \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathbf{d}x = \arcsin x + C; \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathbf{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Integrationsregeln

Theorem (Linearität der Integration)

Seien f, g integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

a) *Summenregel:*

$$\int [f(x) + g(x)] \, \mathbf{d}x = \int f(x) \, \mathbf{d}x + \int g(x) \, \mathbf{d}x$$

b) *Faktorregeln:*

$$\int \lambda f(x) \, \mathbf{d}x = \lambda \int f(x) \, \mathbf{d}x$$

c) *Monotonie:*

$$f \leq g \Rightarrow \int f(x) \, \mathbf{d}x \leq \int g(x) \, \mathbf{d}x$$

Substitution

Ein wichtiges Hilfsmittel zum Berechnen von Integralen besteht darin, eine Transformation (*Substitution*) der Integrationsvariablen durchzuführen.

Theorem (Substitutionsregel)

Sei f eine stetige Funktion und φ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathbf{d}t = \int f(x) \, \mathbf{d}x$$

Beispiele zur Substitution

Example

- $\int f(ax+b)\;\mathbf{d}x = \frac{1}{a}\int f(t)\;\mathbf{d}t$, mit $t = ax+b$
- $\int tf(t^2)\;\mathbf{d}t = \frac{1}{2}\int f(x)\;\mathbf{d}x$, mit $t = x^2$
- Logarithmische Integration:

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\;\mathbf{d}t = \ln|\varphi(t)| + C, \quad \left(f(x) = \frac{1}{x}, x = \varphi(t)\right)$$

- $\int \tan t\;\mathbf{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t}\;\mathbf{d}t - \ln|\cos t| + C$

Partielle Integration

Neben der Substitutionsregel ist die *partielle Integration* ein weiteres nützliches Hilfsmittel zur Berechnung von Integralen.

Theorem (Partielle Integration)

Seien u, v integrierbare und stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int u(x) \cdot v'(x) \,\mathbf{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \,\mathbf{d}x$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int x \cos x \, \mathbf{d}x$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int x \cos x \;\mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = x, v'(x) = \cos(x)$ und erhalten

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int x \cos x \, \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = x, v'(x) = \cos(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, \mathbf{d}x &= x \sin x - \int \sin x \, \mathbf{d}x \\ \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathbf{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, \mathbf{d}x \end{aligned}$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \; \mathbf{d}x$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \; \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = \ln x, v'(x) = 1$ und erhalten

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \, \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = \ln x, v'(x) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int u(x) \cdot v'(x) \, \mathbf{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, \mathbf{d}x \\ \int \ln(x) \cdot 1 \, \mathbf{d}x &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, \mathbf{d}x \\ &= x \ln x - \int 1 \, \mathbf{d}x = x \ln x - x + C \end{aligned}$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \; \mathbf{d}x$$

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \; \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = \ln x, v'(x) = 1$ und erhalten

Beispiele zur Partiellen Integration

Example

Wir betrachten

$$\int \ln x \; \mathbf{d}x$$

dann setzen wir $u(x) = \ln x, v'(x) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int u(x) \cdot v'(x) \; \mathbf{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \; \mathbf{d}x \\
\int \ln(x) \cdot 1 \; \mathbf{d}x &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x \; \mathbf{d}x \\
&= x \ln x - \int 1 \; \mathbf{d}x = x \ln x - x + C
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

Example (Partialbruchzerlegung)

Gegeben:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathbf{d}x = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 x^0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 x^0}\,\mathbf{d}x$$

Falls $m \geq n \Rightarrow$ Polynomdivision durchführen.
Dann erhält als ein Ergebnis ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion mit $m < n$.
Das Polynom kann wie gewohnt integriert werden.
Für die gebrochen Rationale Funktion wenden wir eine Partialbruchzerlegung an (s. nächste Folie).

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Fall 1: Seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ einfache Nullstellen von $Q(x)$. Dann kann man $Q(x)$ in Produktdarstellung angeben:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathbf{d}x &= \int \frac{A_1}{x-x_1}\,\mathbf{d}x + \cdots + \int \frac{A_n}{x-x_n}\,\mathbf{d}x \\ &= A_1 \cdot \ln|x-x_1| + \cdots + A_n \cdot \ln|x-x_n| + C\end{aligned}$$

Bestimmung der Koeffizienten A_i durch Koeffizientenvergleich (siehe Übung).

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Fall 2: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mehrfache Nullstellen von $Q(x)$.

$$\begin{aligned} Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^{k_i} &= (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_r)^{k_r}, \\ \sum_{i=1}^{r} k_i &= \text{Grad}\,(Q(x)) = n \end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Fall 3: $Q(x)$ besitzt keine reellen Nullstellen.

a) $Q(x)$ enthält einen nicht mehr zerlegbaren quadratischen Faktor.
Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + A_2}{x^2 + Bx + C}$$

Integration:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, \mathbf{d}x = A_1 \int \frac{x}{x^2 + Bx + C} \, \mathbf{d}x + A_2 \int \frac{\mathbf{d}x}{x^2 + Bx + C}$$

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung)

Fall 3: $Q(x)$ besitzt keine reellen Nullstellen.

b) $Q(x)$ enthält einen nicht mehr zerlegbaren quadratischen Faktor mit Vielfachheit $r > 1$, d.h. $(x^2 + Bx + C)^r$. Ansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{k=1}^{r} \frac{A_{1k}x + A_{2k}}{(x^2 + Bx + C)^k} \\
&= \frac{A_{11}x + A_{21}}{x^2 + Bx + C} + \frac{A_{12}x + A_{22}}{(x^2 + Bx + C)^2} + \dots \\
&\quad \dots + \frac{A_{1r}x + A_{2r}}{(x^2 + Bx + C)^r}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung, Fortsetzung

Example (Partialbruchzerlegung, Fortsetzung Fall 3)

$$\int \frac{x \, \mathbf{d}x}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{\mathbf{d}x}{ax^2 + bx + c}$$

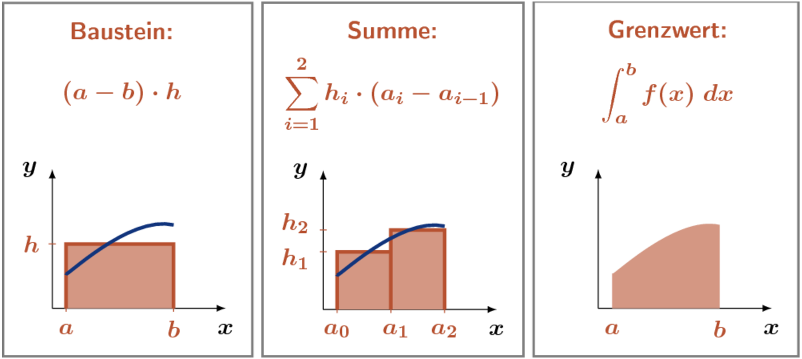
$$\int \frac{\mathbf{d}x}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right)$$

Motivation

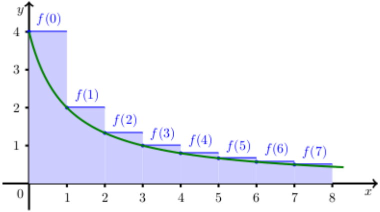
Wie berechnet man die Fläche zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse?

Motivation

Wie berechnet man die Fläche zwischen dem Graph einer Funktion und der x-Achse?



Treppenfunktion



Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta_n, \quad \text{mit } \Delta_n = \frac{b-a}{n}.$$

wobei $x_0 = a; x_1 = a + \Delta_n; \ldots; x_n = a + n\Delta_n = b.$

Definition

Definition

Sei f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Setzen wir $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$ und $x_k = a + k \cdot \Delta_n$ für $k = 0, \ldots, n$. Dann konvergiert die Folge der Rechtecksflächen

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n.$$

Man nennt ihren Grenzwert das bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a, b]$ und schreibt

$$\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n.$$

Definition

Definition (Fortsetzung)

Dabei heißt $f(x)$ Integrand, x Integrationsvariable, a und b untere bzw. obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ das Integrationsintervall.

Definition

Definition (Fortsetzung)

Dabei heißt $f(x)$ Integrand, x Integrationsvariable, a und b untere bzw. obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ das Integrationsintervall.

Theorem (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Sei f stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, \mathbf{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Sätze über Integrationsgrenzen

Theorem

1) $\int_a^a f(x)\,\mathbf{d}x = 0$
2) $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathbf{d}x$
3) *Sei $a < b < c$, dann gilt*

$$\int_a^c f(x)\,\mathbf{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathbf{d}x$$

Sätze über Integrationsgrenzen

Theorem

4) $\int_a^b (f+g)\ \mathbf{d}x = \int_a^b f\ \mathbf{d}x + \int_a^b g\ \mathbf{d}x$
   $\int_a^b c \cdot f\ \mathbf{d}x = c \cdot \int_a^b f\ \mathbf{d}x$ *für* $c \in \mathbb{R}$.
5) *Substitution:*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathbf{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathbf{d}x$$

Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse

Definition

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann heißt

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x$$

der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f.

Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse

Definition

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann heißt

$$A = \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f.

1) Wenn $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$, dann gilt $A = \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x \geq 0$.
2) Wenn $f(x) \leq 0$ für $x \in [a, b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x \leq 0$ und $A := -\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x \geq 0$.

Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse

3) Nimmt $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ sowohl positive, als auch negative Werte an, so müssen zunächst die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ bestimmt werden. Man erhält für $k = 1, \ldots, n, n+1$

$$I_k \quad = \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ \mathbf{d}x \text{ mit } x_0 = a \text{ und } x_{n+1} = b$$

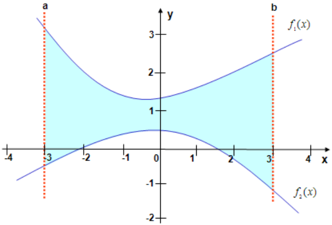
Ausgeschrieben:

$$I_1 = \int_a^{x_1} f(x)\ \mathbf{d}x, I_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathbf{d}x, \ldots, I_{n+1} = \int_{x_n}^{b} f(x)\ \mathbf{d}x$$

$$\Rightarrow \quad A = |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_{n+1}| = \int_a^b |f(x)|\ \mathbf{d}x.$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

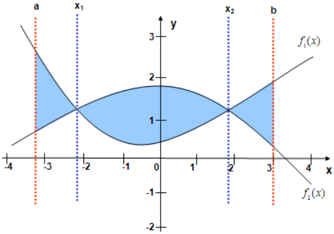
Seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auf $[a, b]$ stetig.



1) Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sich im Intervall $[a, b]$ nicht schneiden, so gilt für die Fläche A zwischen den beiden Funktionen

$$A := \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \,\mathbf{d}x.$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



2) Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sich im Intervall $[a, b]$ schneiden, so müssen zuerst die Schnittpunkte $x_1, \ldots, x_n$ zwischen beiden Funktionen berechnet werden.
Anschließend muss das Integral stückweise auf den Intervallen $[x_k, x_{k+1}]$ für $k = 0, \ldots, n$ mit $x_0 = a$ und $x_{n+1} = b$, wie in 1) beschrieben, berechnet und aufsummiert werden.

1. Fall: Unbeschränktes Integrationsintervall

1) $f(x)$ stetig auf $[a, \infty)$; $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x, \quad b \in [a, \infty)$$

2) $f(x)$ stetig auf $(-\infty, b]$; $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

3) $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig!

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\ \mathbf{d}x + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

Existieren die jeweiligen Grenzwerte, so konvergieren die Integrale, ansonsten divergieren sie.

2. Fall: Unendlichkeitsstellen des Integranden (Polstellen)

Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b] \setminus \{c\}$ und $a \leq c \leq b$,

1) falls $c = a$

$$\int_{a=c}^{b} f(x)\, \mathbf{d}x = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, \mathbf{d}x$$

2) falls $c = b$

$$\int_{a}^{b=c} f(x)\, \mathbf{d}x = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\, \mathbf{d}x$$

3) falls $a < c < b$

$$\int_{a}^{b} f(x)\, \mathbf{d}x = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{a}^{c-\epsilon_1} f(x)\, \mathbf{d}x + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\, \mathbf{d}x$$