

Prof. Dr. Andreas Thümmel
FH Darmstadt - FB MN

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik I für E/T - Klausurvorbereitung
18. Dezember 2003

Erster Teil: Grosse Übung

Aufgabe 1:

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zunächst die Determinante von A . Nach Ihren Berechnungen führen Sie eine Probe durch.

Aufgabe 2:

Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

Führen Sie eine Polynomdivision $P(x) : Q(x)$ durch für

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^6 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 1 \\ Q(x) &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Werten Sie das Polynom $P(x)$ aus Aufgabe 4 aus an den Stellen $x = 1, 2, -1$ mit Hilfe des Hornerschemas.

Aufgabe 6:

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch für die gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}$$

Aufgabe 7:

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$$

(Hinweis: Partialbruchzerlegung)

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sin^2(x)}$$

Aufgabe 8:

Geben Sie die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ an.

Zweiter Teil: zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 1:

Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Führen Sie für Ihrer Berechnungen eine Probe durch.

Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5/2 \\ 15/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Führen Sie eine Polynomdivision $P(x)/Q(x)$ durch für die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1 \\ Q(x) &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

Lösung: $P(x)/Q(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 10x + 12 + \frac{15x-13}{x^2-2x+1}$

Aufgabe 4:

Werten Sie das Polynom $P(x)$ aus Aufgabe 3 aus an den Stellen $x = 1, 2, 3$ mit Hilfe des Horner-Schemas.

Lösung: $P(1) = 2, P(2) = 257, P(3) = 3908$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$$

Lösung: einfach den Bruch auflösen, dann jeden einzelnen Bruch als geometrische Reihe lesen, ergibt $2 \frac{1}{2}$.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Lösung: $1/2$

Aufgabe 7:

Geben Sie die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$ an.

Lösung: $f(x) = 2 - (x - 2) + (x - 2)^2 - (x - 2)^3 + (x - 2)^4 \dots$

Aufgabe 8:

Berechnen Sie

$$\frac{(1 - 3i)^2 \cdot (2 - 1i)}{(2 - 3i)}$$

Lösung: $-\frac{1}{13}(32 + 74i)$

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie die Gerade $\vec{G}_1$, die durch die Punkte

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verläuft, bzw. die Ebene $\vec{E}_1$, die durch die Punkte

$$\vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene, sowie den Schnittwinkel.

Welchen Abstand hat der Punkt P_1 von der Ebene ?