Definition (Fakultät)

Die Fakultät einer Zahl n ist durch

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

definiert.

Definition (Binomialkoeffizienten)

Seien k und n nicht negative ganze Zahlen für die $k \leq n$ gilt. Dann heißt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der Binomialkoeffzient "n über k".

Es gelten die folgenden Spezialfälle
$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$ und $\binom{n}{n} = 1$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

Für zwei reelle Zahlen a und b gilt

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Die auftretenden Koeffizienten sind Binomialkoeffizienten.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Alle drei Binomischen Formeln sind:

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Definition (Potenz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann heißt a^b die "b-tePotenz von a" oder "a hoch b".

Es gilt $a^0 = 1$ und $0^a = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und für $a \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}, a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Definition (Logarithmus)

Seien $a, c \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, dann heißt

$$\log_a c$$

der "Logarithmus der Zahl c zur Basis a".

Grundsätzlich gilt die Beziehung:

$$b = \log_a c \Leftrightarrow c = a^b$$

Folgenden Gesetze gelten bei Potenzen und Logarithmus

- $a^b a^c = a^{b+c}$ und $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

Basiswechsel

- $a^c = b^{c \cdot \log_b a}$
- $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$

Definition (Absolutbetrag)

Der Absolutbetrag $|x|$ einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x. & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Definition (Signum)

Das Signum (Vorzeichen) einer reellen Zahl x ist gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}, \text{ für } x \neq 0, \operatorname{sgn}(0) = 0.$$

Für das Rechnen mit Beträgen gelten die folgenden Regeln:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ oder $x \geq a$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

Gegeben seien $p, q \in \mathbb{R}$ und gesucht ein $x \in \mathbb{R}$ für das

$$x^2 + px + q = 0$$

gilt.
Als Lösung erhält man

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Es gilt $x \in \mathbb{R}$ g.d.w $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ gilt.

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- $a < b \Rightarrow ac < bc, \text{ für } c > 0$
- $a < b \Rightarrow ac > bc, \text{ für } c < 0$
- $a < b, 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$
- $a < b \Rightarrow -a > -b$
- $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ oder $a = b$

Prinzip der vollständigen Induktion zum Beweis einer Aussage:

(i) Induktionsanfang: Die zu beweisende Aussage ist für $n_0 = 1$ richtig.

(ii) Induktionsannahme: Es wird angenommen, dass die Aussage für $n_k = k$ richtig ist.

(iii) Induktionsschluss: Wenn die Aussage für $n_k = k$ richtig ist, dann ist sie auch für $n_{k+1} = k + 1$ richtig.

Die Aussage ist für alle natürlichen Zahlen gültig, wenn zunächst (i) bewiesen wird und unter Verwendung der Annahme (ii) auch die Behauptung (iii) gezeigt werden kann.

Definition ($\mathbb{C}$)

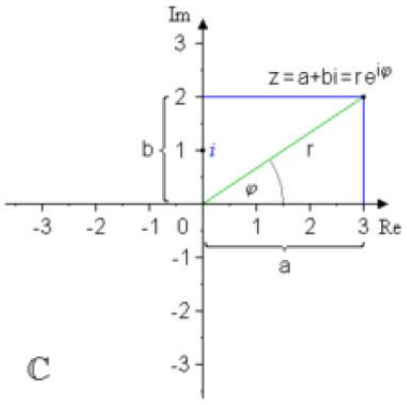
Unter einer komplexen Zahl z versteht man die Summe einer reellen Zahl a und einem Vielfachen $b\mathrm{i}$ der imaginären Einheit $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$,

$$z = a + b\mathrm{i}$$

Die Menge der komplexen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{C} = \{z = a + b\mathrm{i} \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Der Realteil von z wird mit $\mathrm{Re}(z) = a$ bezeichnet. Der Imaginärteil von z mit $\mathrm{Im}(z) = b$ bezeichnet.



(Quelle: wikipedia.org)

Es gilt

$$z = \underbrace{a + b\mathrm{i}}_{\textit{kartesisch}} = \underbrace{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}_{\textit{trigonometrisch}} = \underbrace{re^{\mathrm{i}\varphi}}_{\textit{exponentiell}} =: r\exp(\mathrm{i}\varphi)$$

Durch die Einführung von Polarkoordinaten $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$ mit $r = |z|$ und

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, & a > 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, & a < 0, b \in \mathbb{R} \\ \arctan\frac{b}{a} + 2\pi, & a > 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0 \\ 0, & a = b = 0 \end{cases}$$

kann die komplexe Zahl z auch durch $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dargestellt werden.

Wegen der Eulerformel

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

ist die trigonometrische Form $r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ von z identisch mit

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Definition (Summe und Differenz)

Die *Summe* $z_1 + z_2$ und die *Differenz* $z_1 - z_2$ zweier komplexer Zahlen

$$z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1 \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$$

sind definiert durch

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2) \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + \mathrm{i}(b_1 - b_2) \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion sind nur in kartesischer Form möglich. Liegt z in anderer Form vor muss z in kartesische Form umgewandelt werden.

Definition (Multiplikation)

Das *Produkt* $z_1 \cdot z_2$ zweier komplexer Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + \mathrm{i}b_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \\ z_2 &= a_2 + \mathrm{i}b_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

ist definiert durch

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + \mathrm{i}(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Definition (Division)

Der *Quotient* z_1/z_2 zweier Komplexer Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + \mathrm{i}b_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \\ z_2 &= a_2 + \mathrm{i}b_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} \end{aligned}$$

ist definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{i}\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

Definition (Potenzieren)

Die *Potenz* z^a einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$, die in trigonometrischer bzw. exponentieller Form gegeben sei, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, ist definiert durch

$$z^a = r^a(\cos(a\varphi) + \mathrm{i}\sin(a\varphi)) = r^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\varphi}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Definition (Wurzel)

Die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{z}$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch die Menge aller Lösungen der Gleichung $x^n = z$, definiert durch

$$\sqrt[n]{z} = \{x \in \mathbb{C} : x^n = z\}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Theorem

Die Gleichung $x^n = z$ besitzt für jede kopmlexe Zahl z genau n Lösungen. Die Lösungsmenge $\sqrt[n]{z}$ ist durch

$$\sqrt[n]{z} = \left\{x_k = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1\right\}$$

Definition

Sei $\vec{a} = (a_1, \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{b} = (b_1, \dots b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ definiert, durch

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Definition

Sei $\vec{a} = (a_1, \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $k \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann ist die skalare Multiplikation des Vektors $\vec{a}$ mit dem Skalar k definiert, durch

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \dots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Definition (Gleichheit)

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, wenn alle Koordinaten paarweise gleich sind, also $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots a_n = b_n$ gilt.

Definition (Länge eines Vektors)

Die Länge ($\|\cdot\|_2$-Norm) eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ ist gegeben durch

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Definition

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor $\vec{v}$ der Länge 1, d.h. $\|\vec{v}\| = 1$.

Definition (Linearkombination)

Gegeben seien die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann heißt der Ausdruck

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$.

Definition (Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit)

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sind linear Unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur durch eine Linearkombination der Vektoren erzeugen lässt, in der alle Koeffizienten der Kombination auf den Wert Null gesetzt werden.

Theorem

Die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sich (irgend-)einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen schreiben lässt.

Definition

Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Es gilt:

- $\langle a, a \rangle = 0$ genau dann wenn $a = 0$
- $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ (Symmetrie)
- $\langle a, \lambda b + \mu c \rangle = \lambda \langle a, b \rangle + \mu \langle a, c \rangle$ (Linearität)
- $a \perp b$ wenn $\langle a, b \rangle = 0$ (mit $a \neq 0,\ b \neq 0$) (Orthogonalität)

Theorem

Für die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos \varphi$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der von den Vektoren a und b eingeschlossene Winkel ist.

Definition

Ein beliebiger Vektor a kann in Bezug auf eine Richtung, die durch einen anderen Vektor v gegeben ist, in zwei Komponenten $a = a_\perp + a_\parallel$, zerlegt werden, wobei die Komponente

$$a_\parallel = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

parallel zu v ist und

$$a_\perp = a - a_\parallel$$

orthogonal zu v ist.

Bemerkung: Es folgt $\|a_\parallel\| \leq \|a\|$.

Definition

Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

Wenn a und b linear unabhängig sind, dann gilt $c \perp a$ und $c \perp b$ für $c = a \times b$.

Theorem

Für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- $a \times b = -b \times a$ *Antikommutativ-Gesetz*
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *Distributivgesetz*
- $|a \times b|$ *entspricht der Fläche des durch a und b aufgespannten Parallelogramms.*
- $|a \times b| = \|a\| \cdot \|b\| \sin \varphi$, *wobei φ der Winkel zwischen a und b ist.*

Definition (Parameterdarstellung einer Geraden)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Gerade g gegeben durch

$$g = \{p + \lambda \vec{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definition (Parameterdarstellung einer Ebene)

Gegeben sei ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ und zwei Richtungsvektor $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \nparallel \vec{w}$, dann ist die Ebene E gegeben durch

$$E = \{p + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Definition (Normalenform)

Eine Ebene E mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Normalenvektor $\vec{n}$, ist in Normalenform durch

$$E \quad = \quad \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \, \langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0\right\}$$

mit $|\vec{n}| = 1$ gegeben.

Definition (Koordinatenform)

Eine Ebene E mit Ortsvektor $\vec{p}$ und Normalenvektor $\vec{n}$, ist in Koordinatenform durch

$$E \quad = \quad \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\right\}$$

mit $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$ und $d = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$ gegeben.

Definition

Sind zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ vom gleichen Typ $(m; n)$, dann kann man sie addieren bzw. subtrahieren. Ihre Summe bzw. Differenz

$$A \pm B = C \text{ mit } C = (c_{ij})$$

ergibt sich durch Addition bzw. Subtraktion ihrer entsprechenden Elemente

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \ \forall i = 1, 2, \ldots, m \text{ und } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Insbesondere ist der Typ vom C der gleiche Typ wie von b und A.

Definition

Eine Matrix $A = (a_{ij})$ wird mit einer Zahl (einem Skalar) α multipliziert, indem man jedes Element von A mit a multipliziert:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Theorem

Für Addition und Subtraktion von Matrizen (gleichen Types) sowie für deren Multiplikation mit einem Skalar gelten die folgenden Rechengesetze

- $A + B = B + A$ *(kommutativ)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(assoziativ)*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- *Aus* $A + B = 0$ *folgt* $B = -A = (-1) \cdot A$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

Definition (Matrizen Multiplikation I)

Ist $A = (a_{ik})$ eine Matrix vom Typ (m, p) und $B = (b_{kj})$ eine Matrix vom Typ (p, n) dann kann das Produkt $A \cdot B$ gebildet werden. Es ist ebenfalls eine Matrix

$$AB = C \text{ mit } C = (c_{ij})$$

Definition (Matrizen Multiplikation II)

Dabei gilt:

a) Die Produktmatrix $AB = C$ hat den Typ (m, n), d. h.

$$A_{(m;p)}B_{(p;n)} = C_{(m;n)} \begin{cases} m \text{ Zahl der Zeilen von } A \\ n \text{ Zahl der Spalten von } B \end{cases}$$

b) Jedes Element c_{ij} der Produktmatrix $C = AB$ berechnet sich als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \ \forall i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n.$$

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- Aus $AB = 0$ folgt i. Allg. weder $A = 0$ noch $B = 0$.

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- Selbst wenn für zwei Matrizen A und B beide Produkte AB sowie BA existieren, so gilt i. Allg. $AB \neq BA$.

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- $AE = A$ und $EA = A$ mit entsprechend verkettbaren Einheitsmatrizen E;
- $AO = O$ und $OA = O$ mit entsprechend verkettbaren Nullmatrizen O:

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die folgenden Phänomene / Regeln:

- $(AB)C = A(BC) = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

Definition

Jede beliebige quadratische Matrix A kann beliebig oft mit sich selbst multipliziert werden, was zur Bildung von Potenzen führt

$$AA = A^2, AAA = A^3 \text{ usw.}$$

Definition

Es sei A eine quadratische Matrix. Wenn für sie eine Matrix A^K derart existiert, dass

$$A^K A = AA^K = E$$

gilt, so heißt A^K inverse Matrix von A und wird mit A^{-1} bezeichnet. Damit lautet die Definitionsrelation für A^{-1}

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Theorem

Wenn für die quadratische Matrix 2.Ordnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ *gilt, dann besitzt* A *eine Inverse* A^{-1}*, und sie berechnet sich gemäß*

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Definition

Quadratische Matrizen, die eine Inverse besitzen, heißen *regulär*.
Quadratische Matrizen, für die keine Inverse existiert, heißen *singulär*.

- Jede Einheitsmatrix E ist regulär und es gilt $E^{-1} = E$.
- Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär, wenn keiner ihrer Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) als Linearkombination ihrer restlichen Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) dargestellt werden kann.
- Eine quadratische Matrix A ist genau dann singulär, wenn wenigstens einer ihrer Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) als Linearkombination ihrer restlichen Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) dargestellt werden kann.

- Ist A regulär, so ist auch A^{-1} regulär und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Für reguläre Matrizen A und B von gleicher Ordnung ist auch ihr Produkt AB eine reguläre Matrix, und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $AB \neq 0$, wenn A und B regulär und von gleicher Ordnung.
- Ist A eine reguläre Matrix und ist B mit A in der Reihenfolge A, B verkettbar, dann folgt aus $AB = 0$ stets $B = 0$.
- Ist A eine reguläre Matrix, so ist auch ihre transponierte Matrix A^T regulär, und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Theorem

Wenn A eine reguläre Matrix ist, so hat jede der Gleichungen

$$AX = B \quad \textit{bzw.} \quad YA = B$$

eine (eindeutige) Lösung, und diese Lösungen ergeben sich zu

$$X = A^{-1}B \quad \textit{bzw.} \quad Y = BA^{-1}$$

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

Definition (Rang)

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren einer beliebigen Matrix A wird *Rang* von A genannt und mit $r(A)$ bezeichnet.

- Für jede beliebige Matrix ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich der maximalen Zahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren.
- Wenn A regulär, dann $r(A) =$ Ordnung von A.
- Wenn A singulär, dann $r(A) <$ Ordnung von A.
- Wenn A vom Typ $(m; n)$, dann $r(A) \leq \min(m, n)$.
- Der Rang einer beliebigen Matrix A ist gleich der maximalen Zahl verschiedener Einheitsvektoren, die man durch elementare Umformungen von A erzeugen kann.

Definition (Untermatrix)

Wenn wir nun aus einer quadratischen Matrix A die Zeile i und die Spalte k herausstreichen, so bezeichnen wir das Ergebnis als Untermatrix A_{ik}.

Definition (Determinante)

Es sei A eine quadratische $(n; n)$-Matrix mit den Untermatrizen A_{ik}. Die Determinante $\det(A)$ von A ist eine reelle Zahl, die durch

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{ik})$$

für $n > 1$ rekursiv erklärt ist. Für $n = 1$ und $A = (a_{11})$ wird $\det(A) = a_{11}$ gesetzt.

Es seien A, B quadratische Matrizen vom Typ $(n; n)$, A^T bezeichne die Transponierte von A. Dann gilt

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n$
- $\det(E) = 1$ für jede Einheitsmatrix E.

Theorem

Eine quadratische Matrix A ist genau dann regulär (oder nicht singulär), wenn ihre Determinante nicht verschwindet, d. h. wenn gilt: $\det(A) \neq 0$. *Umgekehrt ist sie genau dann singulär, wenn* $\det(A) = 0$ *gilt.*

Folglich ist ein Lineares Gleichungssystem der Form

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$$

genau dann eindeutig lösbar wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Wie bestimmt man die Inverse A^{-1} von A? Wir benutzen Elementare Umformungen in Form von Multiplikationen, Additionen und Zeilenvertauschungen.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

Theorem

Jedes homogene LAGS

$$Ax = 0 \quad mitA = A_{(m;n)}$$

ist immer lösbar. Eine Lösung ist nämlich der entsprechende Nullvektor:

$$A_{(m;n)}0_{(n;1)} = 0_{(m;1)}$$

Homogene LAGSe können auch vom Nullvektor verschiedene Lösungen besitzen.
Der Nullvektor $0_{(n;1)}$ heißt triviale Lösung des homogenen LAGSs; jeder Vektor $\vec{x} \neq 0$, der das LAGs erfüllt heißt nichttriviale Lösung des homogenen LAGSs.

Für ein beliebiges inhomogenes LAGS $Ax = b$; $b \neq 0$ tritt genau eine der drei Möglichkeiten ein:

- Es ist eindeutig lösbar
- es ist mehrdeutig lösbar, d. h. es besitzt mehr als eine Lösung
- es ist unlösbar.

Wenn $r(A) < r(A; b)$, dann ist $Ax = b$ nicht lösbar.
Wenn $r(A) = r(A; b)$, dann ist $Ax = b$ lösbar, und es gilt

a) die Lösung ist eindeutig, wenn
$r(A) = r(A; b) = n$ (= Zahl der Unbekannten)

b) die Lösung ist mehrdeutig, wenn
$r(A) = r(A; b) < n$ (= Zahl der Unbekannten)

Definition

Eine komplexe Zahl λ heißt Eigenwert der quadratischen Matrix A, wenn es Vektoren $\vec{x} \neq 0$ gibt, die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

sind. Die Lösungsvektoren $\vec{x}$ heißen Eigenvektoren der Matrix A zum Eigenwert λ.

Definition

Gegeben sei eine Matrix A, dann heißt $\det(A - \lambda E) = 0$ die charakteristische Gleichung von A.

Definition

$g \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn zu jedem (beliebig kleinem) $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - g| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

gilt. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Bemerkung: Eine Folge die nicht konvergent ist, nennt man divergent.

Theorem

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\} \\
&\lim_{n\to\infty} \quad \sqrt[n]{n} = 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \quad \sqrt[n]{p} = 1, p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\
&\lim_{n\to\infty} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828\ldots \\
&\lim_{n\to\infty} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Theorem

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^r = (\lim_{n\to\infty} a_n)^r = a^r, r \in \mathbb{R}/0$
- $\lim_{n\to\infty} \log_d(a_n) = \log_d(\lim_{n\to\infty} a_n) = \log_d(a)$

Definition (Beschränkte Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn alle a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ kleiner oder gleich (bzw. größer oder gleich) einer festen Zahl $M \in \mathbb{R}$ sind.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt* wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition (Monotone Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt
monoton wachsend, wenn $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$,
monoton fallend, wenn $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots$,
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Theorem (Konvergenz von beschränkten und monotonen Folgen)

Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen konvergiert.*

Definition

Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist.

Definition

Eine geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine regelmäßige mathematische Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist. Es gilt also

$$a_i = a_0 \cdot q^{i-1}.$$

Definition (Partialsummen und unendliche Reihe)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die endlichen Summen:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 = s_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

heißen *Partial-* oder *Teilsummen*.
Eine Folge von Partialsummen wird *unendliche Reihe* genannt und mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, ist durch

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

gegeben.

Definition (Summe einer Reihe)

Konvergiert die Folge der Partialsummen s_m, so ist ihr Grenzwert s durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegeben und heißt dann Summe der Reihe. Wir schreiben dann

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Betrachten wir eine geometrische Folge mit einem konstanten a_0 und q und die dazugehörige geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Theorem (Unendliche geometrische Reihe)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert für alle $|q| < 1$ mit dem Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \frac{1}{1-q}.$$

Theorem (Linearkombination konvergenter Reihen)

Seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$$

zwei konvergente Reihen reeller Zahlen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lambda a + \mu b$$

Definition (Absolut konvergent)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der absolut Beträge $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Theorem (Majoranten Kriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_n| \leq c_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Theorem (Quotientenkriterium)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut, wenn eine Konstante* $C < 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq C$$

gilt.

Bemerkung:
Falls $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ gilt, so divergiert die Reihe.

Theorem (Wurzel Kriterium)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut, wenn eine Konstante* $C < 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass für alle* $n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq C$$

gilt.

Bemerkung:
Falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ gilt, so divergiert die Reihe.

Theorem (Leibnitzkriterium)

Eine alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert, wenn es eine natürliche Zahl* n_0 *gibt, sodass*

$$|a_{n+1}| \leq |a_n|$$

für alle $n > n_0$ *und wenn* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *gilt.*

Definition (Funktion)

Eine Abbildung oder Funktion f von einer Menge D in eine Menge W ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in W$ zuordnet.Man schreibt dafür:

$$\begin{aligned} f : D &\to W \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

und sagt: "x wird auf $f(x)$ abgebildet" bzw. "$f(x)$ ist das Bild (oder der Funktionswert) von x". Die Menge D heißt *Definitionsbereich* und die Menge W heißt *Wertebereich*.

Definition (Gerade und ungerade Funktionen)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gerade* Funktion, wenn

$$f(-x) = f(x)$$

gilt, und *ungerade* Funktion, wenn

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt.

Definition (Beschränktheit von Funktionen)

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt nach unten bzw. nach oben beschränkt, wenn ihr Wertebereich $W(f)$ nach unten bzw. nach oben beschränkt ist, d. h., wenn es eine Konstante c bzw. C derart gibt, dass

$$c \leq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq C \quad \text{für alle } x \in D(f)$$

gilt.

Definition (Periodische Funktionen)

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn mindestens ein $T \in R, T \neq 0$ existiert, für das

$$x \in D \Leftrightarrow x + T \in D$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$f(x + T) = f(x)$$

für alle $x \in D$ gilt. T wird als Periode der Funktion f bezeichnet.

Seien f, g zwei Funktionen mit identischem Definitionsbereich. So kann man neue Funktionen wie folgt bilden:

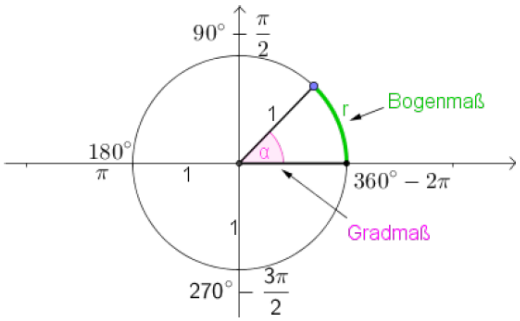
$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{für } g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Definition (Verkettung)

Seien $f : D_f \to M$ und $g : D_g \to N$ Funktionen. Die Hintereinanderausführung oder Verkettung von f und g ist die Funktion von $f \circ g : D_g \to M$ mit

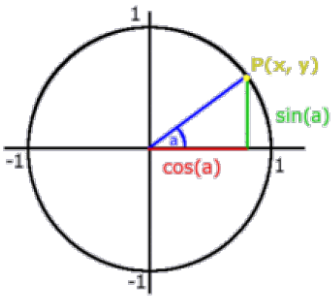
$$x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Damit die Hintereinanderausführung Sinn macht, muss $g(D_g) \subseteq D_f$ gelten.



Definition (Bogenmaß)

Das Bogenmaß x eines Winkels α (in °) ist die Länge des Bogens, welcher dem Winkel α im Einheitskreis gegenüber liegt.



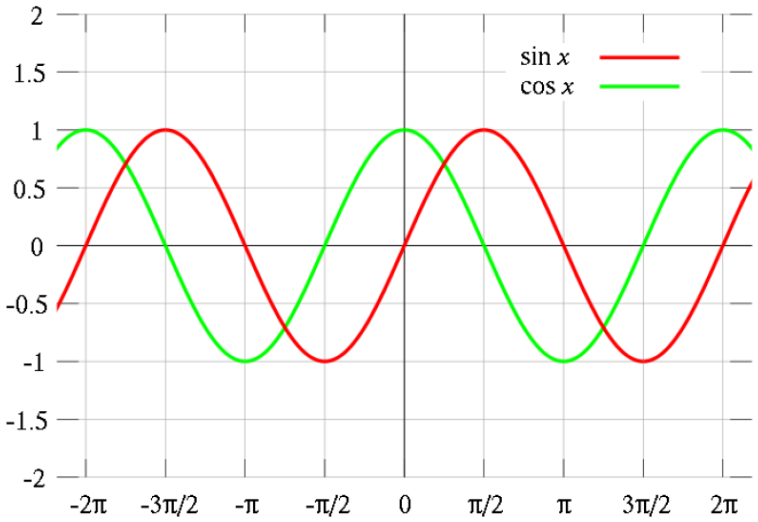
Definition (Trigonometrisch Funktion)

Sei a die Bogenlänge am Einheitskreis, die vom Punkt $(1, 0)$ beginnend entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen wird, und bei $P = (x, y)$ endet. Dann definieren wir

$$\sin(a) = y \quad \text{bzw.} \quad \cos(a) = x$$

und nennen diese Funktionen Sinus bzw. Kosinus.

Um $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zu definieren, lassen wir auch Mehrfachumdrehungen zu ($x = k2\pi$ entspricht k vollen Umdrehungen, falls $k < 0$ ist, so wurde im Uhrzeigersinn gedreht).



Heutzutage kann es bequem sein, die beiden Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch unendliche Reihen wie folgt zu definieren:

Definition (Analytische Definition)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lemma

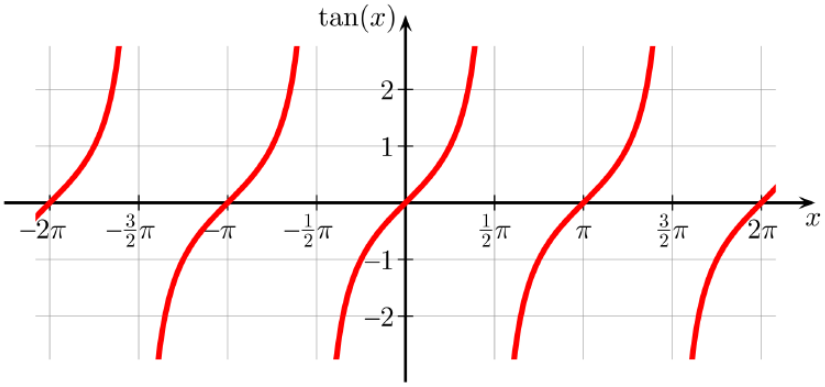
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(-x) = \cos x \quad & \textit{und} \quad \sin(-x) = -\sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Lemma

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$



Definition

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setzt man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definition (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv)

Sei $f : D \to W$ eine Abbildung

- f heißt *injektiv*, wenn $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in D$.
- f heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von W das Bild eines Elements aus D ist, kurz $f(D) = W$.
- f heißt *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Definition

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to M \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion.

- f heißt streng monoton wachsend, wenn gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

- f heißt streng monoton fallend, wenn gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

- Wenn anstellen von $<$ und $>$ (bei den Funktionswerten) jeweils $\leq$ bzw. $\geq$ gilt, dann nennt man die Funktion nur monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Theorem

Eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to M \subseteq \mathbb{R}$ ist injektiv, wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Gilt weiter, dass $f(D) = M$ ist (Surjektivität), so ist die Funktion f bijektiv.

Alle notwendigen Grundlagen für die Definition der Inversen bzgl. Verkettung sind definiert, wir können die Inverse einer Funktion definieren.

Definition (Umkehrfunktion)

Ist die Funktion $f : D \to W$ bijektiv, dann heißt die Funktion, die jedem $y \in W$ das eindeutig bestimmte $x \in D$ mit $y = f(x)$ zuordnet, die *Umkehrfunktion* (oder inverse Funktion) von f. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet.

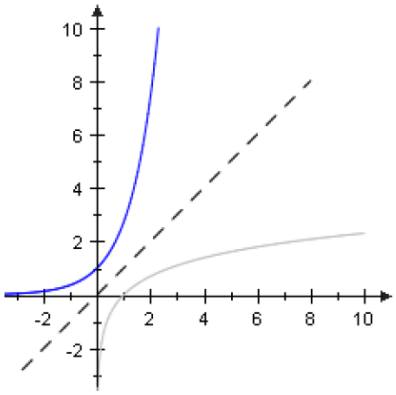
$f^{-1} : W \to D$ hat folgende Eigenschaft:
$f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $y = f(x)$.
Insbesondere gilt

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$

für alle $x \in D$ bzw. $y \in W$.

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen Arcus-Funktionen. Für die Existenz der Umkehrfunktionen ist es notwendig, den Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen einzuschränken.

trig. Funktion	eing. Def. Bereich	Umkehrfunktion	Def. Bereich
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin x$	$[-1; 1]$
$\cos x$	$[0; \pi]$	$\arccos x$	$[-1; 1]$
$\tan x$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$[0; \pi]$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$



Theorem

Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *gegeben durch* $f(x) = a^x$ *ist für* $0 < a < 1$ *streng monoton fallend und für* $1 < a$ *streng monoton wachsend.*
Ihre Umkehrfunktion wird als Logarithmusfunktion *bezeichnet:*
$f^{-1} : (0, \infty) \to$ *mit* $f^{-1}(x) = \log_a(x)$.

Definition (Polynom)

Ein Polynom ist eine Funktion $P : D \to W$, der Form

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$.
Der Grad des Polynoms ($\deg P$ oder $\operatorname{grad} P$) ist gegeben durch den höchsten Koeffizienten n für den $a_n \neq 0$ gilt.
Eine Nullstelle ist durch ein x gegeben für das $P(x) = 0$ gilt.

Definition (Produktdarstellung)

Gegeben sei ein Polynom $P(x)$ vom Grad n mit den Nullstellen x_0 bis x_n, dann ist die Produktdarstellung von $P(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} P(x) &= \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \\ &= (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n). \end{aligned}$$

Definition (Gebrochen rationale Funktion)

Seien $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$ und $0 \leq j \leq m$. Die Funktion

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

heißt gebrochen rationale Funktion.

$n < m$: echt gebrochen rational

$n \geq m$: unecht gebrochen rational

Für das Verhalten von rational gebrochenen Funktionen im Unendlichen kann die folgende Regel verwendet werden:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_n}{b_m} \right) x^{n-m}$$

wobei a_n und b_m jeweils die höchsten nicht verschwindenden Koeffizienten sind.

Definition (Asymptote)

Sei f eine Funktion, g eine Gerade und $d(\cdot, \cdot)$ der Abstand, dann heißt g Asymptote von f falls

$$\lim_{P \in g, |P| \to \infty} d(P, f) = 0$$

gilt. D.h. der Graph der Funktion nähert sich im unendlichen der Asymptote an, bzw. die Asymptote ist die Tangente an den Graphen der Funktion.

Definition (Polstellen)

Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte unbeschränkt wachsen oder fallen, heißen Pole oder Unendlichkeitsstellen der Funktion $f(x)$.

Definition (Pol der k-ten Ordnung)

x ist ein Pol k-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ $P_n(x) \neq 0$ und $Q_m(x) = 0$ ist eine Nullstelle von k-ter Ordnung.

Definition (Nullstelle der k-ten Ordnung)

x_i ist eine Nullstelle k-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ $P(x)$ kann geschrieben werden als $P_n(x) = (x - x_i)^k \cdot g(x)$

Definition (Stetig hebbare Definitionslücke)

x ist eine Lücke $\Leftrightarrow$ ($P_n(x) = 0$ ist Nullstelle der Ordnung k_1 und $Q_m(x) = 0$ ist Nullstelle der Ordnung k_2 und es gilt $k_1 \geq k_2$)

Der Definitionsbereich D einer gebrochen rationalen Funktion$f(x)$ ist gegeben durch

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Pole}, \text{Lücken}\}$$

Bestimmung der Nullstellen und Pole einer gebrochen rationalen Funktion:

1. Zerlegung des Zähler- und Nennerpolynoms in Linearfaktoren und Kürzung gemeinsamer Faktoren (Schließung der Lücken).
2. Reelle Linearfaktoren im Zähler sind reelle Nullstellen.
   Reelle Linearfaktoren im Nenner sind reelle Pole.
3. Bestimmung von Fortsetzungen $\tilde{f}$ von f auf hebbaren Definitionslücken.

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$ und in einer Umgebung von x_0 definiert.
Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D, x_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g_r \quad \text{(rechtseitiger Grenzwert).}$$

Für jede Folge $(\widetilde{x_n})$ mit $\widetilde{x_n} \in D, \widetilde{x_n} < x_0$ und $\lim_{n\to\infty} \widetilde{x_n} = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x_n}) = g_L \quad \text{(linkseitiger Grenzwert).}$$

Gilt $g_r = g_L$, so existiert der Grenzwert g.

Bei den Grenzwerten kann man verkürzt

- für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = g_r$$

- für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = g_L$$

schreiben.

Definition (Stetigkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt stetig in Punkt x_0 falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f heißt stetig in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.

Theorem

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} f+g &: D \to \mathbb{R}, \\ \lambda f &: D \to \mathbb{R}, \\ fg &: D \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

im Punkt x_0 stetig. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$$

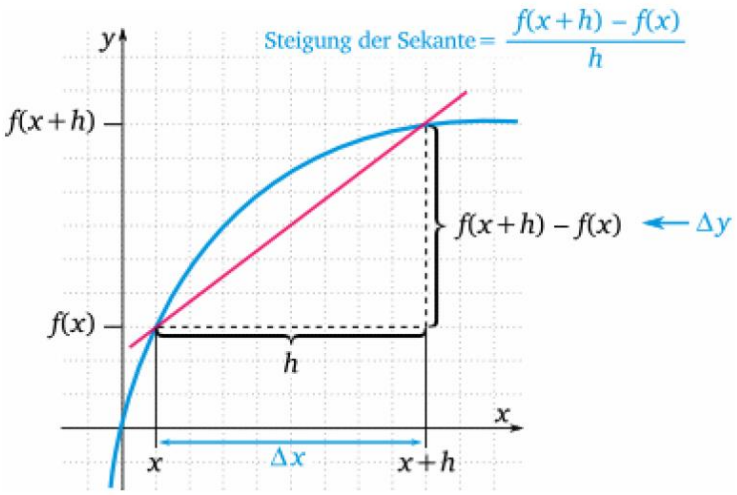
in x_0 stetig. Dabei ist $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in einem Punkt $x \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt x (man schreibt auch $\frac{\mathbf{d}f(x)}{\mathbf{d}x}$). Die Funktion f heißt differenzierbar in D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.



Beim Grenzübergang ($h \to 0$) geht die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$ über.

Theorem

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ differenzierbar, so ist sie auch in a stetig.

Allgemein

1. $f(x) = C,\ f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = 1/x^n,\ f'(x) = -n/x^{n+1}$, für $x \neq 0$
4. $f(x) = x^\alpha,\ f'(x) = \alpha a x^{\alpha-q}$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
5. $f(x) = \ln x,\ f'(x) = 1/x$, für $x > 0$
6. $f(x) = \log_a x,\ f'(x) = 1/(x \ln a)$, für $x > 0$
7. $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x$
8. $f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x \ln a$

Trigonometrische Funktionen

- $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x,\ f'(x) = 1/(\cos^2 x)$ für $x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = \cot x,\ f'(x) = -1/(\sin^2 x)$, für $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = \arcsin x,\ f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, für $-1 < x < 1$
- $f(x) = \arccos x,\ f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, für $-1 < x < 1$
- $f(x) = \arctan x,\ f'(x) = 1/(1+x^2)$
- $f(x) = \operatorname{arccot} x,\ f'(x) = -1/(1+x^2)$

Theorem

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g,\ \lambda f,\ fg : D \to \mathbb{R}$$

in x differenzierbar und es gelten die Rechenregeln:

a) *Linearität:*

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x). \end{aligned}$$

Theorem (Fortsetzung)

b) *Produktregel:*

$$(fg)'(x) \quad = \quad f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

c) *Quotientenregel: Ist $g(a) \neq 0$ für alle $a \in D$, so ist auch die Funktion $(f/g) : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \quad = \quad \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Theorem

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion und $\varphi = f^{-1} : D^* \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion, wobei $D^* = f(D)$.
Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) \quad = \quad \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

Theorem

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Die Funktion f sei im Punkt $x \in D$ differenzierbar und g sei in $y := f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

im Punkt x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) \quad = \quad g'(f(x))f'(x).$$

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Falls die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ ihrerseits im Punkt $x \in D$ differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{\mathbf{d}^2 f(x)}{\mathbf{d}x^2} := f''(x) := (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f in x.
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in D, wenn f in jedem Punkt $x \in D$ k-mal differenzierbar ist. Sie heißt k-mal stetig differenzierbar in D, wenn überdies die k-te Ableitung $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ in D stetig ist.

Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktionen mit $a \in D$. Dann heißt

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die Taylor-Reihe *von f im Entwicklungspunkt a.*

In den meisten Fällen wird $T_i f(x;a) = \sum_{k=0}^{i} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ zur Berechnung verwendet.

Theorem

Auf dem Intervall $I =]a, b[$ seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und es existiere der Limes

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}.$$

Dann gelten die folgenden Regeln von de l'Hospital:

1) *Falls $\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x) = 0$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ dann gilt,*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Theorem (Fortsetzung)

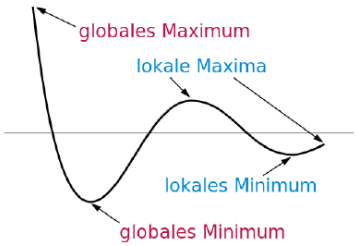
2) *Falls $\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ dann gilt ebenfalls,*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Bemerkung 1: Die Regel gilt auch für $b \to \infty$.
Bemerkung 2: Alle anderen unbestimmten Formen lassen sich umformen, so dass die Regel 1 oder 2 angewendet werden kann.

Die folgende Tabelle zeigt wie unbestimmte Ausdrücke umgeformt werden können um die Regel von l'Hospital zu verwenden.

Funktion $f(x)$	$\lim_{x\to b} f(x)$	Elementare Umformung
$g(x)\cdot h(x)$	$0\cdot\infty$ bzw. $\infty\cdot 0$	$\frac{g(x)}{\frac{1}{h(x)}}$ bzw. $\frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$g(x)-h(x)$	$\infty-\infty$	$\frac{\frac{1}{h(x)}-\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)h(x)}}$
$g(x)^{h(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{h(x)\cdot\ln g(x)}$



Definition (Globales Minimum und Maximum)

Sei $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe in $x_n\in]a,b[$ ein globales Maximum (Minimum), wenn

$$f(x)\le f(x_n)\quad(\text{bzw. } f(x)\ge f(x_n))$$

für alle $x\in]a,b[$ gilt.

Theorem

Die Funktion $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ besitze im Punkt $x\in]a,b[$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x)=0$.

Bemerkung: $f'(x)=0$ ist nur eine *notwendige*, aber nicht *hinreichende* Bedingung für ein lokales Extremum.

Die 2. Ableitung beschreibt das Monotonie-Verhalten von $f'(x)$ und bestimmt dabei die Krümmung der Kurve.

Definition (Konvex)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) > 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ zunimmt.

Definition (Konkav)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.Wir nennen f konkav, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.

Bemerkung: $f''(x) < 0$: heißt, dass die Steigung von $f(x)$ abnimmt.

Theorem

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ ein differenzierbare Funktion. Im Punkt $x \in]a, b[$ sei f zweimal differenzierbar und es gelte

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x) > 0).$$

Dann besitzt f in x ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Bemerkung: Dieser Satz gibt nur eine *hinreichende*, aber nicht *notwendige* Bedingung für ein Extremum an.

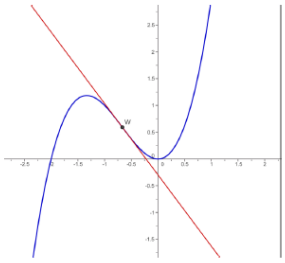
Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man sagt f habe in x_0 einen Wendepunkt, wenn es Intervalle $]\alpha, x_0[$ und $]x_0, \beta[$ gibt, so dass entweder

- f in $]\alpha, x_0[$ konvex und in $]x_0, \beta[$ konkav ist, oder dass
- f in $]\alpha, x_0[$ konkav und in $]x_0, \beta[$ konvex ist.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph der Funktion f im Punkt x_0 das Vorzeichen seiner Krümmung ändert.

Bemerkung: Das heißt, dass der Graph der Funktion f im Punkt x_0 das Vorzeichen seiner Krümmung ändert.



Theorem

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$. Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und es gilt ferner

$$f''(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f'''(x_0) \neq 0,$$

dann hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Definition (Sattelpunkt)

Sei f eine Funktion mit einem Wendepunkt in x_0 und weiter gelte $f'(x_0) = 0$, dann nennen wir diesen Wendepunkt einen Sattelpunkt.

Theorem

Sei $f'(x_0) = 0$ und die Nächstfolgende nicht *veschwindende Ableitung $f^{(n)}(x_0)$.*

- *Ist n gerade, so gilt:*
  $f(x_0)$ ist ein relatives Minimum für $f^{(n)}(x_0) > 0$
  $f(x_0)$ ist ein relatives Maximum für $f^{(n)}(x_0) < 0$
- *Ist n ungerade, so gilt:*
  $f(x_0)$ hat einen Sattelpunkt.

Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien weiter ihre Nullstellen als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ gesucht. Das Newton-Verfahren löst diese Gleichung iterativ und startet mit einem Näherungswert x_0. In jedem Iterationsschritt x_n wir der Graph von f durch die Tangenten an $f(x_n)$ ersetzt. Der Schnittpunkt der Tagente mit der x-Achse ist das neue x_{n+1}.

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Falls die, durch diese Iterationsvorschrift gebildete Folge x_n, wohldefiniert ist und gegen ein $\xi \in [a, b]$ konvergiert, so folgt, dass $f(\xi) = 0$ gilt.

Theorem

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt

a) *Es gibt genau ein $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.*

b) *Ist $x_0 \in [a, b]$ ein beliebiger Startpunkt mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

Definition

Eine Differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Theorem

Sei $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x) = F'(x)$ dann folgt daraus, dass $F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$2x$	x^2
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

Definition

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion f heißt *unbestimmtes Integral*,

$$\int f(x)\, \mathbf{d}x = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f ist der *Integrand* und die Konstante C wird *Integrationskonstante* genannt.

$$\int a\ \mathbf{d}x = ax + C$$

$$\int x^n\ \mathbf{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\ \mathbf{d}x = \ln|x| + C; \quad x \neq 0$$

$$\int e^x\ \mathbf{d}x = e^x + C$$

$$\int a^x\ \mathbf{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$$

$$\int \sin x\ \mathbf{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\ \mathbf{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathbf{d}x = \tan x + C; \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ \mathbf{d}x = -\cot x + C; \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathbf{d}x = \arcsin x + C; \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathbf{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathbf{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Theorem (Linearität der Integration)

Seien f, g integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

a) *Summenregel:*

$$\int [f(x) + g(x)] \ \mathbf{d}x = \int f(x) \ \mathbf{d}x + \int g(x) \ \mathbf{d}x$$

b) *Faktorregeln:*

$$\int \lambda f(x) \ \mathbf{d}x = \lambda \int f(x) \ \mathbf{d}x$$

c) *Monotonie:*

$$f \leq g \Rightarrow \int f(x) \ \mathbf{d}x \leq \int g(x) \ \mathbf{d}x$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zum Berechnen von Integralen besteht darin, eine Transformation (*Substitution*) der Integrationsvariablen durchzuführen.

Theorem (Substitutionsregel)

Sei f eine stetige Funktion und φ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \ \mathbf{d}t = \int f(x) \ \mathbf{d}x$$

Theorem (Partielle Integration)

Seien u, v integrierbare und stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int u(x) \cdot v'(x) \ \mathbf{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \ \mathbf{d}x$$

Gegeben:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathbf{d}x = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 x^0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 x^0}\,\mathbf{d}x$$

Falls $m \geq n \Rightarrow$ Polynomdivision durchführen.
Dann erhält als ein Ergebnis ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion mit $m < n$.
Das Polynom kann wie gewohnt integriert werden.
Für die gebrochen Rationale Funktion wenden wir eine Partialbruchzerlegung an (s. nächste Folie).

Fall 1: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einfache Nullstellen von $Q(x)$. Dann kann man $Q(x)$ in Produktdarstellung angeben:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathbf{d}x &= \int \frac{A_1}{x - x_1}\,\mathbf{d}x + \cdots + \int \frac{A_n}{x - x_n}\,\mathbf{d}x \\ &= A_1 \cdot \ln|x - x_1| + \cdots + A_n \cdot \ln|x - x_n| + C\end{aligned}$$

Bestimmung der Koeffizienten A_i durch Koeffizientenvergleich (siehe Übung).

Fall 2: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mehrfache Nullstellen von $Q(x)$.

$$\begin{aligned} Q(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{k_i} &= (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}, \\ \sum_{i=1}^{r} k_i &= \text{Grad } (Q(x)) = n \end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots \end{aligned}$$

Fall 3: $Q(x)$ besitzt keine reellen Nullstellen.

a) $Q(x)$ enthält einen nicht mehr zerlegbaren quadratischen Faktor. Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + A_2}{x^2 + Bx + C}$$

Integration:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, \mathbf{d}x = A_1 \int \frac{x}{x^2 + Bx + C} \, \mathbf{d}x + A_2 \int \frac{\mathbf{d}x}{x^2 + Bx + C}$$

Fall 3: $Q(x)$ besitzt keine reellen Nullstellen.

b) $Q(x)$ enthält einen nicht mehr zerlegbaren quadratischen Faktor mit Vielfachheit $r > 1$, d.h. $(x^2 + Bx + C)^r$. Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{k=1}^{r} \frac{A_{1k} x + A_{2k}}{(x^2 + Bx + C)^k} \\ &= \frac{A_{11} x + A_{21}}{x^2 + Bx + C} + \frac{A_{12} x + A_{22}}{(x^2 + Bx + C)^2} + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{A_{1r} x + A_{2r}}{(x^2 + Bx + C)^r} \end{aligned}$$

Definition

Sei f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Setzen wir $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$ und $x_k = a + k \cdot \Delta_n$ für $k = 0, \ldots, n$. Dann konvergiert die Folge der Rechtecksflächen

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n.$$

Man nennt ihren Grenzwert das bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a, b]$ und schreibt

$$\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta_n.$$

Definition (Fortsetzung)

Dabei heißt $f(x)$ Integrand, x Integrationsvariable, a und b untere bzw. obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ das Integrationsintervall.

Theorem (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Sei f stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Theorem

1) $\int_a^a f(x)\ \mathbf{d}x = 0$
2) $\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathbf{d}x$
3) *Sei $a < b < c$, dann gilt*

$$\int_a^c f(x)\ \mathbf{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathbf{d}x$$

Theorem

4) $\int_a^b (f+g)\ \mathbf{d}x = \int_a^b f\ \mathbf{d}x + \int_a^b g\ \mathbf{d}x$
   $\int_a^b c \cdot f\ \mathbf{d}x = c \cdot \int_a^b f\ \mathbf{d}x$ *für* $c \in \mathbb{R}$.
5) *Substitution:*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathbf{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathbf{d}x$$

Definition

Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ stetig und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann heißt

$$A = \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f.

---

1) Wenn $f(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$, dann gilt $A = \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x \geq 0$.
2) Wenn $f(x) \leq 0$ für $x \in [a,b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x \leq 0$ und $A := -\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x \geq 0$.

3) Nimmt $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ sowohl positive, als auch negative Werte an, so müssen zunächst die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ bestimmt werden. Man erhält für $k = 1, \ldots, n, n+1$

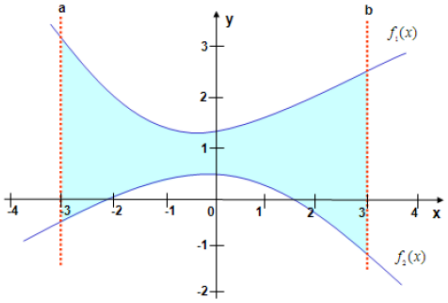
$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ \mathbf{d}x \text{ mit } x_0 = a \text{ und } x_{n+1} = b$$

Ausgeschrieben:

$$I_1 = \int_a^{x_1} f(x)\ \mathbf{d}x, I_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathbf{d}x, \ldots, I_{n+1} = \int_{x_n}^{b} f(x)\ \mathbf{d}x$$

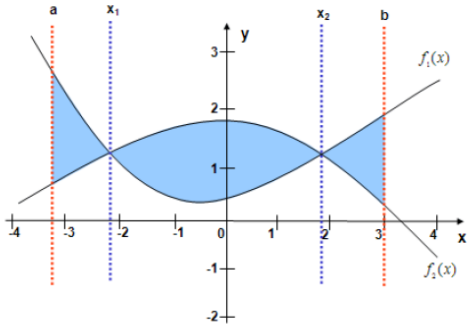
$$\Rightarrow \quad A = |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_{n+1}| = \int_a^b |f(x)|\ \mathbf{d}x.$$

Seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auf $[a, b]$ stetig.



1) Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sich im Intervall $[a, b]$ nicht schneiden, so gilt für die Fläche A zwischen den beiden Funktionen

$$A := \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| \, \mathbf{d}x.$$



2) Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sich im Intervall $[a, b]$ schneiden, so müssen zuerst die Schnittpunkte $x_1, \ldots, x_n$ zwischen beiden Funktionen berechnet werden.
Anschließend muss das Integral stückweise auf den Intervallen $[x_k, x_{k+1}]$ für $k = 0, \ldots, n$ mit $x_0 = a$ und $x_{n+1} = b$, wie in 1) beschrieben, berechnet und aufsummiert werden.

1) $f(x)$ stetig auf $[a, \infty)$; $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{\infty} f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x, \quad b \in [a, \infty)$$

2) $f(x)$ stetig auf $(-\infty, b]$; $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

3) $f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig!

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\ \mathbf{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

Existieren die jeweiligen Grenzwerte, so konvergieren die Integrale, ansonsten divergieren sie.

Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b] \setminus \{c\}$ und $a \le c \le b$,

1) falls $c = a$

$$\int_{a=c}^{b} f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\ \mathbf{d}x$$

2) falls $c = b$

$$\int_a^{b=c} f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\ \mathbf{d}x$$

3) falls $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\ \mathbf{d}x = \lim_{\epsilon_1\to0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)\ \mathbf{d}x + \lim_{\epsilon_2\to0^+} \int_{c+\epsilon}^b f(x)\ \mathbf{d}x$$