



Übungsaufgabenblatt No. 6 zur Vorlesung Mathematik I für WIng

08. Dezember 2023

Auf diesem Aufgabenblatt sind Präsenz- und Hausaufgaben gegeben. Die Präsenzaufgaben werden vom Übungsleiter vorgerechnet, die Hausaufgaben sind abzugeben (auf Papier: jeweils unmittelbar vor den Übungen oder nach Absprache, oder elektronisch möglichst als PDF-Dokument).

Abgabe der H-Aufgaben dieses Aufgabenblattes: 18. bzw. 19.12.2023

Präsenzaufgaben:

P1: Grenzwertberechnung für Folgen

1.

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Anm: verwende $(1+x)^n \geq (1+nx)$

2.

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$$

3.

$$c_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

Anm.: es sei $c \geq a, b$. Nutze dann $\sqrt[n]{c^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3c^n}$

P2: Summation von Reihen

1.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}$$

Anm.: nutze $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$$

Anm.: Quotientenkriterium

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{ne^{(-n^2)}}$$

Anm.: Wurzelkriterium

4.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{n^2 - 1}$$

5.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Anm.: geometrische Reihe

Hausaufgaben:

H1: Eigenwerte und Eigenvektoren - Nachtrag

Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

H2: Grenzwertberechnung von Folgen

Berechnen Sie - falls existent - den Grenzwert folgender Folgen:

1.

$$a_n = \frac{3 - 4n}{6 + 2n}, \quad b_n = \frac{(3 - 4n)^2}{(6 + 2n)^2}, \quad c_n = \frac{(3 - 4n)}{(6 + 2n)^2}, \quad d_n = \frac{(3 - 4n)^2}{(6 + 2n)},$$

2.

$$a_n = n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n, \quad b_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + n - 6}, \quad c_n = \frac{\sqrt{n^6 + n^4} - n^3}{5n(n^2 + 1) - 3}$$

3.

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1 \text{ mit } a_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}\sqrt{b_n^2 + 1} \text{ mit } b_1 = 1$$

H3: Summenberechnung für Reihen: ermitteln Sie, ob die betrachteten Reihen konvergent sind (also existieren). Falls ja, dann berechnen Sie den Grenzwert (sofern 'einfach' möglich ...).

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^3}{4^n}$$

Anm.: Quotientenkriterium

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Anm.: Wurzelkriterium

3. (sog. Teleskopreihe)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{2n(n-1)}$$

4. (sog. Teleskopreihe)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$$

Anm.: geometrische Reihe