h_da

HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vorlesungsskript

Derivate

Stand: 01. Juni 2023

Prof. Dr. Andreas Thümmel

Contents

List of Figures

1 Grundlagen

1.1 Werterhaltungsmechanismen

Neben der Wertvermehrung und der Wertorientierung (Stichwort: Value Based Management) ist Werterhaltung, das heisst Absicherung vorhandener Werte, ein Thema.

Die Geschäftstätigkeit, die der Wertvermehrung (Gewinn ist das Ziel einer jeden unternehmerischen Tätigkeit) dient, wird also um eine Komponente Werterhaltungsmechanismen ergänzt.

Man kann dieses schlicht als Gleichung

Business = operative Geschäftstätigkeit + Risikomanagement

darstellen.

Risiko wird als Bedrohung von Werten wahr genommen, z.B. in

1. Banken und Finanzinstituten
2. Versicherungen
3. Unternehmungen allgemein

Das Investmentgeschäft der Banken und Finanzunternehmen beschäftigt sich mit (lediglich ...) drei unterschiedlichen Wertbeeinflussungsfaktoren:

- dem Wert an sich (Aktie, Aktienkurs)
- Zinsen
- Devisen

Indirekt kann zusätzlich noch die Inflation genannt werden.

Diese Grössen sind mittelbar von Unternehmungen bzw. von staatlichem Handeln abhängig, d.h. die hier genannten Aspekte können nicht unbedingt eigenständig betrachtet werden.

Schutzmechanismen bei Instrumenten der Finanzindustrie sind z.B.:

- Optionen (Hedging)
- Value at Risk (VaR)
- Portfoliooptimierung
- Strukturanalysen (z.B. für Zinsen: Duration usw.)

Versicherungen stellen eine Gemeinschaft dar, die im Falle eines Wertverlustes diesen (total oder teilweise) ersetzt. Hierzu zahlen die Mitglieder eine Prämie ein. Dieser Mechanismus ist also nicht präventiv, er ist passiv.
Besser ist es, einen Schaden erst gar nicht entstehen zu lassen, und evtl. potenzielle Gefahren frühzeitig zu erkennen und evtl. zu beseitigen; können diese nicht beseitig werden, sind Schutzmassnahmen aktiv zu gestalten; das ist der Grundgedanke des Risk Managements.

Insb. Unternehmen (zu denen auch Banken und Versicherungen gehören) sind durch neuere Gesetzgebungen usw. gezwungen, ein aktives Risk Management einzurichten. Die wertschöpfenden Strukturen sind in Unternehmen aber sehr vielschichtig.

Der (wirtschaftliche) Erfolg eines Unternehmens ist zum einen definiert durch den Absatz der Produkte am Markt mit Kunden, zum anderen durch die inneren Strukturen, die Aufwände, Kosten usw. erzeugen.

Die simple Gleichung

Gewinn = Umsatz - Kosten

kann in den beiden auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Grössen entsprechend detailliert aufgeschlüsselt werden.

Schutzmechanismen hier sind z.B.:

- Produkt: Herstellungs-Qualität
- Preis: Preispolitik, Absatzstrategie
- Kunden: CRM
- Aufwände: Steuern
- Kosten: Lohnpolitik, Einkaufsstrategie, Rationalisierungen, ...

1.2 Zum Risiko-Begriff

In der Entscheidungstheorie unterscheidet man zwischen:

Sicherheit - Risiko - Unsicherheit

Risiko unterscheidet sich insofern von Unsicherheit dadurch, dass die Wertverluste, die eintreten könnten, modellierbar sind. D.h. für Risiko gibt es eine math. Beschreibungsmöglichkeit, insb. also ein (wahrscheinlichkeitstheoretisches) Modell inkl. Verteilungen usw. Dadurch lassen sich diese Annahmen, nämlich die unterstellten Verteilungen etc. auch überprüfen, d.h. messen.

Mit der Annahme von Verteilungen liegt aber noch kein Modell vor; es werden i.d.R. noch diverse weitere, oftmals idealisierte (d.h. vereinfachende) Annahmen dem Modell unterstellt. Diese Idealisierungen sind in der Praxis sicher nicht erfüllt - bis zu einem gewissen Grad; sie dienen lediglich der Komplexitätsreduktion bzw. dem Ableiten analytischer Lösungen, die entsprechend studiert werden können.

1.3 Modellierung des Aktienkurses

Die Wertentwicklung eines Wertpapiers (z.B. der Kurs einer Aktie) wird im Folgenden mit

$$S(t)$$

bezeichnet (von engl.: Stock).

Die (kontinuierliche) Zeit wird nun in diskrete (i.a. nicht notw. äquidistante) Zeitintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ unterteilt. Ein Index an einer Grösse bezeichnet dann immer die Grösse zu einem Zeitpunkt, d.h. z.B. $S_i := S(t_i)$. Der betrachtete Gesamtzeitraum sei $[0, T]$

Die Rendite des Aktienkurses, gemessen zwischen zwei Zeitpunkten t_{i+1} und t_i, ist dann:

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}$$

1.3.1 Wertpapierkurs ohne Schwankungen

Die Zeit sei äquidistant eingeteilt, d.h. $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ für alle i. Liegt eine äquidistante Einteilung vor, dann wird der Index i nicht aufgeführt.

Als einfachstes Modell betrachten wir nun den Kursverlauf eines Wertpapiers, der konstant in der Zeit wächst.

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \cdot \Delta t$$

Daraus folgt:

$$S_{i+1} = S_i(1 + \mu \cdot \Delta t)$$

Für das gesamte Zeitintervall ist:

$$T = N \cdot \Delta t$$

D.h.:

$$\begin{aligned} S_N &= S_0 \cdot (1 + \mu \cdot \Delta t)^N \\ &= S_0 \cdot e^{N \cdot \ln(1 + \mu \cdot \Delta t)} \end{aligned}$$

Für kleines Δt erhält man eine Näherung von:

$$\begin{aligned} &= S_0 \cdot e^{N \cdot \mu \cdot \Delta t} \\ &= S_0 \cdot e^{\mu \cdot T} \end{aligned}$$

D.h. für $\Delta t \to 0$ erhält man die Formel der konstanten (risikolosen !) Verzinsung.

1.3.2 Wertpapierkurs mit Schwankungen

Man betrachte die Standard-Abweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (R_i - \bar{R})^2}$$

Die Summe in der Wurzel sind insg. $N = \frac{T}{\Delta t}$ Terme. T ist fest.

Für $\Delta t \to 0$ muss $\sigma < \infty$ bleiben. D.h. man erhält als Eigenschaft eines (sinnvollen) Wertpapierkurses mit Schwankungen das Ergebnis:

$$R_i = O(\sqrt{\Delta t})$$

Diese Relation ist im Sinne der Wurzel als maximal anzusehen; folgende Konstruktion ist also sinnvoll:

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \cdot \Delta t + X \cdot \sqrt{\Delta t}$$

Die Grösse X kann z.B. angesetzt werden mit:

$$X = \sigma \cdot \phi$$

wobei ϕ eine Zufallsvariable, verteilt (z.B. ...) nach der Standard-Normalverteilung, und σ konstant ist.

Insgesamt folgt dann:

$$R_i = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \phi \cdot \sqrt{\Delta t}$$

oder

$$S_{i+1} = S_i + \mu \cdot S_i \cdot \Delta t + \sigma \cdot S_i \cdot \phi \cdot \sqrt{\Delta t}$$

μ heisst auch Drift-Rate, Expected Return oder Growth Rate.

1.3.3 Schätzungen für die Drift-Rate und die Volatilität

Ein Schätzer für die Drift-Rate ist:

$$\mu \quad = \quad \tfrac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Ein Schätzer für die Volatilität bzw. Standard-Abweichung ist:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^{N} (R_i - \bar{R})^2}$$

1.4 Stochastische Differentialgleichungen I

Setzt man

$$dX := \phi\sqrt{\Delta t}$$

so gilt:

$$E[dX] = 0, \quad E[(dX)^2] = dt$$

Mit

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dX$$

erhält man ein Modell eines Wertpapierkurses in kontinuierlicher Zeit. Dieses Modell heisst standardisierter Wiener-Prozess.

dX wird als standard-normalverteilt angenommen. Warum das sinnvoll ist, wird nun erläutert.

1.4.1 Zentraler Grenzwertsatz

Seien $X_1, X_2, \dots, X_N$ iid. Zufallsvariablen, alle mit Mittelwert m und Varianz s^2.

Dann folgt, dass

$$S_N := X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

normalverteilt ist mit Mittelwert $N \cdot m$ und Varianz $N \cdot s^2$.

Durch Normierung erhält man:

$$S'_N := \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N \cdot m}{\sqrt{N} \cdot s} \sim N(0,1)$$

Im Aktienkursmodell sind die Kursänderungen nun:

$$S_{i+1} = S_i + \Delta S$$

ΔS ist $\pm$ eine Einheit (was für Δt klein genug sicher ausreicht).

Aus dieser Überlegung und dem zentralen Grenzwertsatz folgt dann, dass die Annahme $dX \sim N(0,1)$ sinnvoll ist.

1.5 Stochastic Calculus

Man betrachte einen Münzwurf. Dieser liefert abwechselnd die Werte Kopf (K) und Zahl (Z). Ein Experiment könnte also folgende Anfangswerte ergeben:

KZZKKZKZZKZZZZKKK...

Man nehme weiter an, für ein Kopf (K) erhält man 1 EUR und für ein Zahl (Z) muss man 1 EUR zahlen.

R_i bezeichne diese Zufallsvariable. Dann folgt:

- $E[R_i] = 0$
- $E[(R_i)^2] = 1$
- $E[R_i \cdot R_j] = 0$ für $i \neq j$

Das Ergebnis der nach einer Anzahl N insgesamt getätigten Zahlungen aufgrund der Münzwürfe ist:

$$S_N := \sum_{j=1}^{N} R_j$$

Die Ausgangsposition ist:

$$S_0 := 0$$

Man erhält nun:

- $E[S_N] = 0$
- $E[(S_N)^2] = N$

Anm.: die hier letztgenannte Gleichung ergibt sich durch betrachten von $(S_N)^2$:

$$E[(S_N)^2] = E[R_1^2 + 2R_1 \cdot R2 + \cdots] = E[R_1^2] + 2E[R_1 \cdot R_2] + \cdots = N$$

1.5.1 Markov-Eigenschaft

Seien nun z.B. $N = 5$ Münzen geworfen worden. Welche Aussage ist nun möglich bzgl. der Erwartung des 6. Wurfes ? Das ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Da die $E[R_i] = 0$ sind, folgt:

$$E[S_6|R_1, \ldots, R_5] = S_5$$

D.h. die Erwartung des Gewinnes für den 6. Wurf ist gleich dem Gewinn, der nach dem 5. Wurf erzielt wurde. Es spielt also keine Rolle, wie der Gewinn in S_4, S_3, usw. war. Die Anzahlen der K's und Z's kann also für S_6 nicht berücksichtigt werden.

Diese Eigenschaft heisst die MARKOV-Eigenschaft eines stochastischen Prozesses.

Man sagt auch: der Random Walk hat kein Gedächtnis.

Anm.: die Erwartung beim Münzwurf $(= 0)$ ist ein Wert, der durch den Münzwurf nicht angenommen werden kann $(= \pm 1)$.

1.5.2 Martingale-Eigenschaft

Nach fünf Würfen ist der Gewinn bzw. Verlust ja bekannt. Die erwarteten Gewinne für die Zukunft sind dann auch bekannt, nämlich:

$$E[S_i|S_j,\ j < i] = S_j, \quad E[S_i] = 0$$

Diese Eigenschaft heisst MARTINGAL-Eigenschaft.

Man sagt auch, dass es sich um ein faires Spiel handelt, denn Gewinn und Verlust können im Folgenden wieder ausgeglichen werden.

1.5.3 Quadratische Variation

Man betrachte:

$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2$$

Da $|S_j - S_{j-1}| = 1$, folgt:

$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2 = i$$

Zwischen S_j und S_{j-1} werde nun zusätzlich die Zeit betrachtet. Zunächst sei die Zeit zwischen zwei Würfen $= 1$ (je Zeiteinheit, z.B. Sekunde) gewesen. Diese 1 Sekunde wird nun unterteilt. Man betrachte jetzt z.B. 6 Münzwürfe pro Sekunde. Je Münzwurf ist der Gewinn bzw. Verlust $\pm\frac{t \cdot 1}{6}$ (vorher: t).

Es folgt:

$$\sum_{j=1}^{6} (S_j - S_{j-1})^2 = 6 \cdot \left(\sqrt{\frac{t \cdot 1}{6}}\right)^2 = t$$

Eine Verallgemeinerung für beliebige Unterteilungen liefert:

$$\sum_{j=1}^{n} (S_j - S_{j-1})^2 = n \cdot \left(\sqrt{\frac{t \cdot 1}{n}}\right)^2 = t$$

1.5.4 Brownscher Prozess

Mit $n \to \infty$ erhält man also:

- $E[S(t)] = 0$
- $E[S(t)^2] = t$

Ein Grenzprozess mit diesen Eigenschaften heisst Brownsche Bewegung. Der Grenzprozess selbst wird dann mit X(t) bezeichnet.

Die Eigenschaften eines Brownschen Prozesses sind also:

- Endlichkeit von Erwartungswert und Varianz in der Zeit
- Stetigkeit
- Markov-Eigenschaft ist erfüllt
- Martingal-Eigenschaft ist erfüllt
- $X(t_i) - X(t_{i-1}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$
- $\sum\limits_{j=1}^{n} (X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 \to t$

1.6 Stochastischer Prozess

1.6.1 Modellierung eines stochastischen Prozesses

Eine (nicht die einzige, aber die bekannteste ...) Modellierung eines stochastischen Prozesses lautet:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dX$$

Der erste Teil der rechten Seite ist deterministisch; ohne den zweiten Summanden, der als wesentliche Komponente eine Zufallsvariable dX beinhaltet, wäre die Gleichung einfach zu lösen:

$$dX \equiv 0 \Rightarrow S(t) = e^{\mu \cdot t}$$

Durch den zweiten Term wird die Gleichung stochastisch, d.h. zufällig. Einzelne Lösungen lassen sich nicht mehr herleiten, man kann lediglich noch Annahmen bzgl. der statistischen Merkmale wie Erwartungswert, Varianz usw. herleiten. Diese hängen wesentlich von der in dX unterlegten (d.h. angenommenen) Verteilung ab.

Hier wird als Verteilung die Normalverteilung unterstellt; diese wurde über den Münzwurf ja motiviert; es gilt damit insb.:

$$X(t_i) - X(t_{i-1}) \sim N(0, t_i - t_{i-1}), \quad \sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 \to t$$

Das Verhalten des Prozesses wird als gutartig angenommen: alle Grössen bleiben endlich, der Prozess ist stetig und die Martingal-Eigenschaft ist erfüllt.

Will (oder muss !) man eine andere Verteilung unterstellen, dann sind diese Eigenschaften erneut aufzuzeigen.

1.7 Stochastische Integration

Durch die Diskretisierung $t_j = \frac{j \cdot t}{n}$, $j = 0, \ldots, n$ sind die in Art und Weise ähnelnden Riemann-Summen definiert:

$$W_n(t) := \sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})(X(t_j) - X(t_{j-1}))$$

Der Grenzwert lautet:

$$W(t) := \lim_{n \to \infty} W_n(t)$$

Man schreibt diesen Grenzwert als stochastisches Integral:

$$W(t) := \int_0^t f(\tau)\; dX(\tau)$$

Das hier gegebene dX besitzt den Mittelwert 0 und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{dt}$.
Anm.: da bei der Summenbildung der linke Intervallwert von f verwendet wird $(f(t_{j-1}))$, heisst diese Summierung auch antizipatorisch.

Formal kann man dieses Integral differenzieren:

$$dW(t) = f(t) \cdot dX(t)$$

dX ist hier das Inkrement in X, einer Zufallsvariablen mit Mittelwert $= 0$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{dt}$.

1.8 Stochastische Differentialgleichungen II

Dieses (rein formale) differenzieren führt auf stochastische Differentialgleichungen:

$$dW = g(t)\ dt + f(t)\ dX$$

Gelöst werden diese Differentialgleichungen wie in der klassischen Theorie auch über Integrale:

$$W(t) = \int_0^t g(\tau)\ d\tau + \int_0^t f(\tau)\ dX(\tau)$$

1.9 Der Grenzwert der mittleren quadratischen Abweichung

Man betrachte:

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 - t\right)^2\right]$$

wobei $t_j = \frac{j \cdot t}{n}$.

Auflösen der Klammern liefert:

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^4\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}(X(t_i) - X(t_{i-1}))^2 \cdot (X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 - \right.$$
$$\left. -2 \cdot t \cdot \sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 + t^2\right]$$

Nun ist

$$(X(t_i) - X(t_{i-1}))^2 \sim N(0, \frac{t}{n})$$

d.h.

$$E\left[\sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2\right] = \frac{t}{n}$$

sowie

$$E\left[\sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^4\right] = \frac{3 \cdot t^2}{n^2}$$

Jede Aufsummierung liefert zusätzlich einen Faktor n, so dass der Erwartungswert insgesamt lautet:

$$n \cdot \frac{3t^2}{n^2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot \frac{t}{n} \cdot \frac{t}{n} - 2t \cdot n \cdot \frac{t}{n} + t^2$$

D.h.

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 - t\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Für $n \to \infty$ ist also:

$$\sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 \to t$$

Schreibweise:

$$\int_0^t (dX)^2 = t$$

1.10 Funktionen von stochastischen Variablen

Sei $X(t)$ eine Brownsche Bewegung, sowie F eine Funktion. In F wird nun X als Variable eingesetzt.

Beispiel:

$$F(X) = X^2$$

Man betrachte den Differenzenquotienten:

$$F(X(t+h)) - F(X(t)), \quad h := \frac{\Delta t}{n}$$

Die Taylorentwicklung liefert:

$$F(X(t+h)) - F(X(t)) = (X(t+h) - X(t))\frac{dF}{dX}(X(t)) + \frac{1}{2}(X(t+h) - X(t))^2\frac{d^2F}{dX^2}(X(t)) + \cdots$$

Das gilt für jeden Zeitpunkt $t, t+h, t+2\cdot h, \ldots$; also:

$$(F(X(t+h)) - F(X(t))) + (F(X(t+2h)) - F(X(t+h))) + \cdots + (F(X(t+n\cdot h)) - F(X(t+(n-1)\cdot h))) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(X(t+j\cdot h) - X(t+(j-1)\cdot h))\cdot\frac{dF}{dX}(X(t+(j-1)\cdot h)) + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}(X(t+(j-1))\sum_{j=1}^{n}(X(t+j\cdot h) - X(t+(j$$

Die Summen sind als stoch. Integrale zu lesen, d.h.:

$$F(X(t+n\cdot h)) - F(X(t)) = F(X(t+\Delta t)) - F(X(t)) = \int_{t}^{t+\Delta t}\frac{dF}{dX}\cdot dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}(X(t))\cdot\Delta t$$

Insgesamt also:

$$F(X(t+\Delta t)) - F(X(t)) = \int_{t}^{t+\Delta t}\frac{dF}{dX}\cdot dX(\tau) + \int_{t}^{t+\Delta t}\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}(X(\tau))d\tau$$

In der Schreibweise des totalen Differentials:

$$dF = \frac{dF}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}dt$$

Es kommt also ein weiterer Term (mit der zweiten Ableitung) hinzu.
Im Beispiel war $F(X) = X^2$ gewählt. D.h.

$$\frac{dF}{dX} = 2X, \quad \frac{d^2F}{dX^2} = 2, \quad \Rightarrow dF = 2X\ dX + dt$$

Mit folgender Faustregel kann man den zusätzlichen Ito-Term bestimmen:

$$F(X + dX) = F(X) + \frac{dF}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}dX^2$$

Das dX^2 ersetzt man nun durch dt.

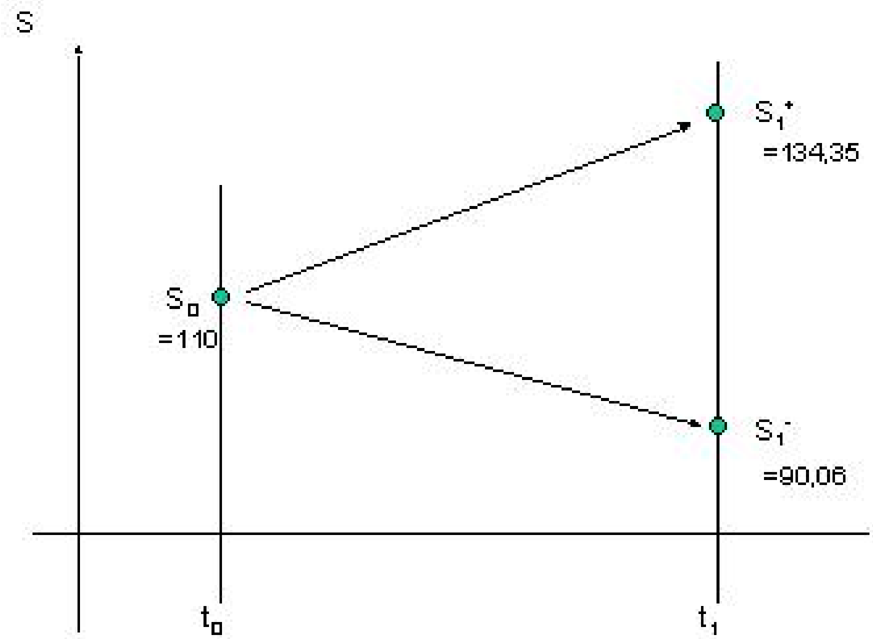
2 Derivate

2.1 Hedging

2.1.1 Einfache Betrachtung einer möglichen Kursschwankung

In t_0 sei der Kurs der Aktie 110 (d.h. $S(t_0) = 110$).

Man nehme an (gleichwahrscheinlich !), in t_1 wird die Aktie entweder $134,35$ oder $90,06$ annehmen (d.h. $S_1^+(t_1) = 134,35$, $S_1^-(t_1) = 90,06$).



Wird S in t_1 verkauft, kann ein Gewinn oder ein Verlust (gegenüber dem Kaufpreis) entstehen.

Ziel sei es nun, mit einem weiteren Instrument die Investition gegen einen möglichen Verlust in S_1 abzusichern. D.h. dieses Instrument müsste im Falle eines Kursverlustes diesen ausgleichen.

Hierzu definiert man nun ein Portfolio bestehend aus einer Anzahl Aktien und dem Instrument:

$$\Pi = A \cdot S - F$$

A ist die Anzahl Aktien, die durch F geschützt werden sollen; F ist der Kaufpreis dieses Rechts.

Man betrachte nun die beiden möglichen Situationen in t_1:

- $\Pi^+ = A \cdot S_1^+ - F^+$
- $\Pi^- = A \cdot S_1^- - F^-$

Das Portfolio soll den gleichen Wert besitzen, d.h.

$$\Pi^+ = \Pi^-$$

Umstellen ergibt unmittelbar:

$$A = \frac{F^+ - F^-}{S_1^+ - S_1^-}$$

A heisst auch das Hedging-Delta.

Hier im Beispiel ist:

$$A = \frac{24,35 - 0}{134,35 - 90,06} = 0,55$$

Mit diesem A ist das Portfolio oben also risikolos !

Dieses Modell ist sehr einfach. Die Aktie nimmt - gleichwahrscheinlich - lediglich zwei Zustände an. Die Wahrscheinlichkeit der Kurse, die die Aktie annehmen kann, müsste eigentlich mit vielen Werten (und damit mit vielen Übergangswahrscheinlichkeiten) definiert werden, oder sogar kontinuierlich.

2.2 Die Aktie als stochastischer Prozess

Die Aktie soll nun also mit einem stochastischen Prozess modelliert werden.

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dX$$

Gegeben ist zudem ein Derivat, d.h. ein vom Kurs (und evtl. direkt von der Zeit abhängiges) Instrument:

$$f = f(S, t)$$

Auch hier ist der Portfolio-Gedanke wesentlich: man bildet ein Portfolio mit einer Aktie und einem Instrument, das vom Wert der Aktie abhängt (also ein Derivat), und bestimmt dann die Zusammensetzung des Portfolios so, dass es risikolos ist.

Das Portfolio setzt sich dann etwa wie folgt zusammen:

$$\Pi = \omega_f \cdot f + \omega_S \cdot S$$

ω_f und ω_S sind zwei noch unbestimmte Faktoren.

Das Portfolio soll risikolos sein; d.h. der Wert des Portfolios bleibt über die Zeit gesehen nicht nur erhalten, sondern dieser soll sich wie ein risikoloses Instrument verzinsen:

$$d\Pi = r\Pi \; dt$$

Nun zur Berechnung von $d\Pi$:

$$d\Pi = \omega_f \cdot df + \omega_S \cdot dS$$

Das dS kann unmittelbar durch die stoch. DGL (s.o.) ersetzt werden; das df ist zu berechnen; hierbei ist der Ito'sche Zusatzterm zu beachten. Insgesamt ergibt sich so:

$$d\Pi = \omega_f \left(\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu \cdot S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \right) \; dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \; dX \right) + \omega_S \cdot (\mu \cdot S \; dt + \sigma \cdot S \; dX)$$

Das Risiko sind die dX-Terme. Gelingt es, diese zu eliminieren, dann ist das Portfolio deterministisch, d.h. risikolos.

Die Faktoren ω_f und ω_S werden also so gewählt, dass die dX-Terme verschwinden. Das gelingt (z.B.) mit folgender Wahl:

$$\omega_f = -1, \quad \omega_S = \frac{\partial f}{\partial S}$$

Mit diesen Faktoren folgt:

$$\begin{aligned} d\Pi &= -\tfrac{\partial f}{\partial t}\, dt - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial S^2}\, dt \\ &= -\left(\tfrac{\partial f}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\, dt \end{aligned}$$

Mit (Faktoren einsetzen !) folgt:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S$$

Dieses setzt man in die Gleichung ein, in der Π risikolos verzinst wird, man erhält:

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\, dt = r \cdot \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S\right)\, dt$$

2.2.1 Black/Scholes-Gleichung

Umstellen liefert die Black/Scholes-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

Diskussion:

- diese Gleichung gilt für ALLE Underlyings und Derivate !
- σ und μ sind konstant und bekannt. Beides gilt für die Laufzeit des Derivates (in der Zukunft) sicher nicht. Das Modell müsste also entsprechend angepasst werden.

- Der Typ der Gleichung ist parabolisch; die Startwerte werden in der Zukunft vorgegeben als Verhalten des Derivates bzgl. des dann aktuellen Kurses. Der Wert des Derivates wird dann also rückwärts berechnet.

2.2.2 Zusammenfassung der Vorgehensweise zur Ableitung der B/S-Gleichung

Folgende Schritte wurden durchgeführt, um die Black-Scholes-Gleichungen abzuleiten:

- Definiere ein Portfolio, in dem ein risikobehaftetes (Underlying) und ein davon abhängiges (Derivat) Instrument enthalten sind. Das Derivates hat die Funktion das Risiko zu eliminierung.
- Jedes Element im Portfolio wird mit einem - noch unbekannten, d.h. zu ermittelnden - Vorfaktor versehen. Dieser Faktor ist keineswegs nur eine Konstante, sondern eine Funktion. Durch geschickte Wahl der Vorfaktoren kann später das Portfolio risikolos werden.
- Die Eliminierung des Risikos, im Falle eines stoch. Prozesses die eliminierung der Terme mit den Zufallskomponenten X, resp. dX, liefert dann Bestimmungsgleichungen für die Faktoren.
- Betrachtet wird nun die Veränderung des Portfolios: $d\Pi$. Da das Portfolio aus zwei Instrumenten (Underlying und Derivat) besteht, ist dieses Differential des Portfolios eigentlich eine 'Kombination' von Differentialen des Underlyings und des Derivates; beim Ableiten sind dann insb. die Ito-Terme zu beachten.
- das Portfolio soll risikolos sein, d.h., dass sich der Anlagewert des Portfolios risikolos verzinsen muss.
- In der 'Differential-Kombination', in der beide Vorfaktoren noch enthalten sind, treten nun Terme mit dS auf. Diese werden durch das Differential des stoch. Prozesses ersetzt. Dadurch aber treten nun dX-Terme auf. Die Vorfaktoren werden nun so gewählt, dass diese dX-Terme verschwinden. Gelingt das, dann ist das Differential des Portfolios nicht mehr stochastisch - also deterministisch. Dann hat man nur noch eine 'klassische Differentialgleichung' vor sich ...

2.2.3 Weitere Problemstellungen

Folgende wichtige Effekte, die das Underlying besitzt, müssen modelliert werden:

- Dividendenzahlungen: die Dividende gehört dem Besitzer des Underlyings, nicht dem Derivat-Besitzer. Abgesehen davon, dass durch eine Dividendenzahlung der Underlyingwert eine Unstetigkeit (Sprung) bekommt, ist die Höhe der Dividende ebenfalls stochastisch.
- σ und r, die Volatilität bzw. der risikolose Zins werden im Modell als Konstanten behandelt. Ein allgemeines Modell muss diese auch als stochastisch annehmen und insb. für den Bewertungszeitraum (Zukunft !) diese prognostizieren.

2.2.4 Diskussion spezieller Derivate

Das Derivat $f(S,t)$ ist definiert als abhängige Grösse von S. Das gilt für jeden Zeitpunkt und für jeden Wert des Underlyings. Mit dieser sehr allgemeinen Auffassung können nun unterschiedlichste Finanzinstrumente definiert werden; der Phantasie sind nahezu keine Grenzen gesetzt, insb. wenn man bedenkt, dass die Derivate ja selbst auch Finanzinstrumente sind - es sich also auch zu diesen wiederum ein Derivat definieren lässt (mathematisch ausgedrückt: $g(f(S,t),t)$).

Die Kernproblematik ist die der Laufzeit. Diese kann fest gewählt sein, oder vom Kursverlauf abhängig gemacht werden.

2.2.5 Einteilung der Derivate

Hier eine Einteilung von Derivaten und deren Begrifflichkeiten:

tbd. ...

Basis für Finanzderivate: Wert (Kurs), Zinsen, Währungen

Parameter: S, X, T, σ, r

Diskussion des Modells bzgl. Existenz der Parameter σ und r ...

Europ., amerik., bermud., asian, russian, parisian, ...

Def.: Ausübungszeitpunkt, Verfallszeitpkt., Strike-Preis, Laufzeit, ...

Option, Future, Forward, ...

usw. ...

Das Derivat wird so konstruiert, dass zum jeweiligen Ausübungszeitpunkt das Payoff-Profil angegeben wird.

Entscheidend: Modellierung des Underlyings ...

2.2.6 Beispiele

Europ. Call / Put

Digital

Future

usw. ... muss noch erarbeitet werden ...

2.3 Lösung der Black/Scholes-Differentialgleichung

Die Black/Scholes-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung in den zwei Dimensionen Zeit t und Wert/Kurs S (wobei $S = S(t)$).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

Entscheidend ist die Entwicklung des Derivat-Wertes in der Zeit, der durch lediglich einen Term in der Gleichung, $\frac{\partial f}{\partial t}$, bestimmt wird.

Definiert ist das Payoff-Profil des Derivates zum Ausübungszeitpunkt. Dieser Zeitpunkt liegt in der Zukunft. Um den Wert des Derivates zum jetzigen Zeitpunkt zu berechnen, muss man also in der Zeit rückwärts rechnen; das Payoff-Profil definiert math. die Randbedingung, die durch eine Lösung der Gleichung erfüllt werden muss.

Wie üblich bei partiellen Differentialgleichungen, die eine Dimension Zeit und weitere Dimensionen enthält (d.h. modelliert !), sind bzgl. der möglichen Lösungen der Gleichung zwei Problemstellungen zu betrachten:

1. Fundamentalgleichung

   Eine Lösung $f(S,t)$ muss im Zeitraum (t,T) die partielle Differentialgleichung

   $$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

   erfüllen

2. Randbedingung

   Eine Lösung der Gleichung muss die Randbedingung, gegeben durch das Payoff-Profil, erfüllen; d.h. zum Zeitpunkt T muss das Derivat $f(S,T)$ gleich dem Payoff-Profil sein. Es ist also eine Grenzwertbetrachtung

   $$\lim_{t \to T} f(S,t)$$

   notwendig; die Grenzfunktion muss dann dem Payoff-Profil entsprechen.

2.3.1 Beispiel: Future-Bewertung

Ein Future ist keine Option; d.h. es ist nicht durch ein Kaufs- oder Verkaufs-Recht definiert. Es ist vielmehr so, dass das Underlying zum Ausübungszeitpunkt T zum dann aktuellen Preis erworben werden muss.

D.h., das Payoff-Profil lautet:

$$f(S,T) = S - X_0$$

Ansatz: als Lösung (also als fairen Preis für den Future-Vertrag) setzt man einfach den Kurs minus den diskontierten Verfallswert an:

$$f(S,t) = S - X_0 \cdot e^{-r(T-t)}$$

Zu zeigen ist nun, dass die beiden o.g. Bedingungen an die Fundamentalgleichung und an die Randbedingung erfüllt sind.

1. Randbedingung

   Zunächst zur Randbedingung. Diese ist für die hier angegebene (angebliche ...) Lösung eine einfache Grenzwertbetrachtung:

   $$\lim_{t \to T} f(S,t) = \lim_{t \to T} S - X_0 \cdot e^{-r(T-t)} = S - X_0$$

   D.h. die Randbedingung ist erfüllt.

2. Fundamentalgleichung

   Um zu zeigen, dass die Fundamentalgleichung ebenfalls (!) erfüllt ist, wird $f(S,t)$ wie oben definiert nun in die Black/Scholes-Gleichung eingesetzt.

   Black/Scholes:

   $$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

   Man errechnet:

   $$\frac{\partial f}{\partial t} = -X_0 \cdot r \cdot e^{-r(T-t)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

Insg. lautet die B/S-Gleichung also:

$$-X_0 \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} + r \cdot S = r \cdot \left(S - X_0 \cdot e^{-r(T-t)}\right)$$

Die Fundamentalgleichung ist offensichtlich auch erfüllt.

D.h. die o.g. Funktion f löst die B/S-Gleichung zum angegebenen Payoff-Profil. Das Payoff-Profil ist aber nichts anderes, als ein sog. Future-Kontrakt.

2.3.2 Prinzip der Berechnung von Lösungen beliebiger Derivate

Aus diesem Beispiel lässt sich nun das Rechenprogramm ableiten, das notwendig ist, um zu prüfen, ob eine - hier einfach angegebene - Funktion f (also das Derivat !) die B/S-Gleichung erfüllt.

Andersherum lässt sich erahnen, welches Potenzial sich hinter der B/S-Gleichung verbirgt: gelingt es, eine Lösungsformel für beliebige Payoff-Profile (die dann quasi parametrisiert in eine Formel eingesetzt werden) herzuleiten und zwar so, dass automatisch Fundamentalgleichung und Randbedingung (Payoff) erfüllt sind, dann ist man also in der Lage, jedes Derivat (fair) zu bepreisen !

Hierzu betrachte man nochmal die B/S-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

Im folgenden wird die Gleichung durch verschiedene Variablensubstitutionen (ein beliebter Trick zur Lösung von Differentialgleichungen ...) so vereinfacht, dass eine prinzipielle Lösung, eine Fundamentallösung, erkennbar wird.

1. Rechte Seite eliminieren

   Setzt man:

   $$f(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot U(S,t)$$

   so erhält man eine einfachere Gleichung für die neue Unbekannte $U(S,t)$ (die rechte Seite wird 'eliminiert' ...):

   $$\frac{\partial U}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = 0$$

2. Zeit skalieren

   Setzt man in diese Gleichung nun als neue Variable $\tau := T - t$, dann folgt eine Gleichung für $U(S,\tau)$:

   $$\frac{\partial U}{\partial \tau} = r \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$$

   Diese Substitution bewirkt also nichts weiter, als dass Zeit- und Kurs-Dimension 'sauber getrennt' sind (Zeit links, Kurs rechts ...).

3. Vorfaktoren in S eliminieren

   Man erkennt, dass in der B/S-Gleichung in einem Term mit einer partiellen Ableitung nach S ein Vorfaktor mit S in der gleichen Ordnung wie die partielle Ableitung steht. Das riecht nach einem Logarithmus ...

   Mit dem Ansatz

   $$\xi = \ln(S), \quad \Rightarrow S = e^{\xi}, \quad \Rightarrow \frac{1}{S} = e^{-\xi}$$

   erhält man eine Gleichung für $U(\xi,\tau)$:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

Nun sind alle Vorfaktoren vor den partiellen Ableitungen Konstanten, d.h. man hat eine (partielle) Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Mit solchen Gleichungen kennt man sich schon eher aus ...

4. Ableitung 1. Ordnung in S eliminieren

   Nun noch zum Term mit der einfachen Ableitung in S. Die Substitution

$$x = \xi + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot \tau$$

   liefert nun eine Funktion $U(\xi, \tau) = W(x, \tau)$, für die gilt:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

   Insg. erhält man:

$$\begin{aligned} f(S,t) &= e^{-r(T-t)} \cdot U(S,t) \\ &= e^{-r\tau} \cdot U(S, T-\tau) \\ &= e^{-r\tau} \cdot U(e^{\xi}, T-\tau) \\ &= e^{-r\tau} \cdot U\left(e^{x-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}, T-\tau\right) \\ &= e^{-r\tau} \cdot W(x,\tau) \end{aligned}$$

Diese nach der letzten Substitution erreichte Gleichung ist aus der Physik bestens bekannt, es ist eine Wärmeleitungsgleichung. Für diese Gleichung ist eine Fundamentallösung (also genau das, was wir benötigen) bekannt, sie lautet (bezgl. der Funktion W):

$$W(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}}$$

x' ist dabei beliebig; diese so definierte Funktion $W(x,\tau) = W(x,\tau;x')$ erfüllt die Gleichung für alle x' (zu jeder Zeit τ).

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Das Problem der Fundamentalgleichung ist also gelöst; es bleibt die Betrachtugn der Randbedingung.

Die Randbedingung ist gegeben durch

$$f(S,T) = payoff(S)$$

In den neuen Variablen gilt:

$$W(x,0) = payoff(e^x)$$

Die Zeit läuft also von 0 los, es ist ein 'normales' Startwertproblem.

Die Fundamentallösung oben hat folgende Eigenschaft:

$$\lim_{\tau \to 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}} \cdot g(x')\ dx' = g(x)$$

Allgemeiner ist die Fundamentallösung eine Dirac'sche Deltafunktion mit der Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,x') \cdot g(x')\ dx' = g(x)$$

Man betrachte also die Randbedingungsbedingung genauer:

$$W(x,0) = payoff(e^x)$$

Die Funktion auf der rechten Seite steht links unter dem Integral als Faktor bei der Delta-Funktion. Im B/S-Fall ist diese Deltafunktion ablesbar. Mit der Eigenschaft der Deltafunktion folgt:

$$W(x,\tau;x') = \int_{-\infty}^{\infty} W(x,\tau;x') \cdot payoff(e^{x'})\ dx' = payoff(e^{x})$$

Diese Eigenschaft sichert also, das die Randbedingung erfüllt wird !

Substituiert man nun sämtliche Variablen zurück, dann erhält man:

$$f(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(\log\left(\frac{S}{S'}\right)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} \cdot payoff(S') \cdot \frac{dS'}{S'}$$

Diskussion: Gestalt analog zur Normalverteilung: tbd. ...

Diese Funktion ist also die Lösung der B/S-Gleichung, nun definiert für eine beliebeige Payoff-Funktion (d.h. für ein beliebiges Derivat).

2.3.3 Beispiel: Europäische Call- und Put-Option

Als Beispiel wird nun die Anwendung dieser Formel für eine Option angewendet, dem sog. Plain Vanilla Europäischen Call.

Die Payoff-Funktion lautet:

$$payoff(S) = \max(S - X_0, 0)$$

Setzt man diese Funktion in die Fundamentallösung ein, dann erhält man als Lösung sofort (man beachte insb. die neuen Integralgrenzen):

$$f(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{X_0}^{\infty} e^{-\frac{(\log\left(\frac{S}{S'}\right)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} \cdot (S' - X_0) \cdot \frac{dS'}{S'}$$

Substituiert man

$$x' := \log(S'), \quad \Rightarrow S' = e^{x'}, \quad \Rightarrow dS' = e^{x'} \cdot dx'$$

und beachtet man

$$\log\left(\frac{S}{S'}\right) = \log(S) - \log(S')$$

dann zerfällt das Integral in zwei Teil-Integrale und es folgt:

$$\begin{aligned} f(S,t) \quad &= \quad \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int\limits_{\log(X_0)}^{\infty} e^{-\frac{(-x'+\log(S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} \cdot e^{x'}\ dx' - \\ &-X_0 \cdot \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int\limits_{\log(X_0)}^{\infty} e^{-\frac{(-x'+\log(S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} \cdot\ dx' \end{aligned}$$

Beide Integrale sind sehr ähnlich zur Verteilungsfunktion der Normalverteilung.

Nach ein paar weiteren Rechenschritten (Substitutionen usw. ...) kann man errechnen:

$$f^{Call}(S,t) = S \cdot N(d_1) - X_0 \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{X_0}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{X_0}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Eine einfache Überlegung (lediglich Vorzeichen und Integrationsbereichsproblematik) liefert für eine Put-Option ($Payoff(S) = \max(X_0 - S, 0)$) dann:

$$f^{Put}(S,t) = -S \cdot N(-d_1) + X_0 \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2)$$

2.3.4 Beispiel: Binary-Call

Man betrachte nun eine sog. Binary-Option; diese ist definiert durch die Payoff-Funktion

$$Payoff(S) = \Xi(S - X_0)$$

wobei $\Xi(x)$ definiert ist als die sog. Heavyside-Funktion:

$$\Xi(x) = \begin{cases} 1 & falls \quad x > 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Mit dieser Payoff-Funktion, eingesetzt in die obige Fundamentallösung, bekommt man als Lösung:

$$\begin{aligned} f(S,t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^\infty e^{-\frac{\left(\log\left(\frac{S}{S'}\right)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}} \cdot payoff(S') \cdot \frac{dS'}{S'} \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{X_0}^\infty e^{-\frac{\left(\log\left(\frac{S}{S'}\right)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}} \cdot \frac{dS'}{S'} \\ &= -X_0 \cdot \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\log(X_0)}^\infty e^{-\frac{(-x'+\log(S)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}} \cdot dx' \end{aligned}$$

Der letzte Term ist exakt der zweite Term der Lösung der Call-Option (vgl. oben); d.h. die Lösung der Binary Call-Option lautet:

$$f(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$$

Der Lösung der Binary Put-Option errechnet sich dann zu:

$$f(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot (1 - N(d_2))$$

2.3.5 Die Put-Call-Parität

Nun gilt:

$$\begin{aligned} payoff\ Call &= \max(S - X_0, 0) \\ payoff\ Put &= \max(X_0 - S, 0) \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$payoff\ Call - payoff\ Put = S - X_0$$

Dieses ist das Auszahlungsprofil eines Futures. Dessen Lösung ist bereits bekannt:

$$f^{Future}(S,t) = S - X_0 \cdot e^{-r(T-t)}$$

D.h. es gilt:

$$Call\ -\ Put = S - X_0 \cdot e^{-r(T-t)}$$

Diese Gleichung heisst die Call-Put-Parität.

2.3.6 Modellierung von besonderen Underlying-Ereignissen

Bislang wurde z.B. sytematische Kursänderungen des Underlyings, also z.B. Dividendenzahlungen, Splitts, Bezugsrechte usw. nicht bei der Modellierung des Underlying-Kurses berücksichtigt. Hier soll anhand des Beispiels der Dividende aufgezeigt werden, wie das Modell und die danach folgenden Rechnungen verändert werden muss.

Man betrachte folgende Vereinfachung:

Das Underlying schüttet permanent und konstant eine Dividende D, die prozentual vom Kurs abhängt, aus. D.h. in der Zeit dt wird

$$D \cdot S \cdot dt$$

ausgeschüttet.

Unter dieser Annahme muss also bereits der stochastische Prozess angepasst werden. Die Prozessgleichung lautet jetzt:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot d\Phi - D \cdot S \cdot dt$$

Als Konsequenz ergibt sich einfach:

$$dS = (\mu - D) \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot d\Phi$$

Da D konstant ist, schleppt sich diese Konstante nun immer mit μ durch alle Rechnungen durch. Die B/S-Gleichung mit konstanter permanenter Dividendenzahlung lautet dann (μ wird ersetzt durch den - konstanten - risikolosen Zins r):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - D) \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

Anm.: diese Ersetzung gilt nur für die linke Seite, da die rechte Seite von der Bedingung der risikolosen Verzinsung des Portfolios abgeleitet wird; diese bleibt vom Underlying-Verhalten unberührt !

Anwendungen:

1. Währungsderivate

   Es sei r der Zins in der Bewertungswährung, r_F der Zins in einer anderen Währung. Dann ist für Derivate, die z.B. von Währungswechselkursen abhängen, folgende Gleichung zu lösen:

   $$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - r_F) \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

2. Commodity-Derivate

   Die Besonderheit bei Commodity-Derivaten ist, dass die Güter Transportkosten verursachen (Cost of Carry). Diese Kosten werden in die Gleichung als q eingebracht; zu lösen ist dann:

   $$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q) \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$

2.4 Mehrere Underlyings

Im Falle mehrerer Underlyings sind also mehrere stoch. Prozesse zu betrachten:

$$dS_i = \mu_i \cdot S_i \cdot dt + \sigma_i \cdot S_i \cdot dX_i$$

Das sind alles Wiener-Prozesse, für die gilt:

$$E[dX_i] = 0, \quad E[(dX_i)^2] = dt$$

Zudem sind die Prozesse i.a. nicht unabhängig, d.h. stochastisch gesprochen, sie sind korreliert:

$$E[dX_i \cdot dX_j] = \rho_{ij}\ dt$$

mit ρ_{ij} dem Korrelationskoeffizienten der Prozesse i und j.

Die Eigenschaften sind aus der Statistik bekannt; sei $R = (\rho_{ij})$ die Korrelationsmatrix, dann ist $\rho_{ii} = 1$, $R = R^T$, R positiv definit.

Die Kovarianzmatrix lautet:

$$\Sigma \cdot R \cdot \Sigma$$

wobei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Um stochastisch rechnen zu können wird das mehrdimensionale Ito-Lemma benötigt; dieses lautet für ein $f = f(S_1, \ldots, S_n, t)$:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j} \right) \cdot dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial S_i} \cdot dS_i$$

Um diese Formel herzuleiten wird folgendes verwendet:

$$(dX_i)^2 = dt, \quad dX_i dX_j = \rho_{ij}\ dt$$

2.4.1 Messen der Korrelation und Kovarianz

Mit

$$R_i(t_k) := \frac{S_i(t_k + \Delta t) - S_i(t_k)}{S_i(t_k)}, \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{\Delta t(M-1)} \sum_{k=1}^{M} (R_i(t_k) - \bar{R}_i)^2}$$

wird die Korrelation gemessen (wobei M = Anzahl der Datenpunkte):

Kovarianz:

$$\frac{1}{\Delta t(M-1)} \sum_{k=1}^{M} (R_i(t_k) - \bar{R}_i)(R_j(t_k) - \bar{R}_j)$$

Korrelation:

$$\frac{1}{\Delta t(M-1)\sigma_i \sigma_j} \sum_{k=1}^{M} (R_i(t_k) - \bar{R}_i)(R_j(t_k) - \bar{R}_j)$$

2.4.2 Derivate auf mehrere Underlyings

Das Rechenprogramm für Derivate auf mehrere Underlyings ist analog zum einfachen Fall; nur muss nun lediglich die Korrelation beachtet (d.h. als Zusatzterm im Modell berücksichtigt) werden.

Das Portfolio enthält nun ein Derivat und mehrere Underlyings:

$$\Pi = f(S_1, \ldots, S_n, t) - \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \cdot S_i$$

Das Portfolio soll wieder risikolos werden; zu bestimmen sind hierfür die Δ_i.

Man errechnet (mehrdim. Ito beachten):

$$d\Pi = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j} \right) \cdot dt + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial S_i} - \Delta_i \right) \cdot dS_i$$

Damit das Portfolio risikolos wird, muss $\Delta_i = \frac{\partial f}{\partial S_i}$ gewählt werden.

2.4.3 Mehrdimensionale B/S-Formel

Die mehrdimensionale B/S-Formel lautet dann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j} + r \cdot \sum_{i=1}^{n} S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} - rf = 0$$

Mit Dividendenzahlungen der N Underlyings folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 f}{\partial S_i \partial S_j} + \cdot \sum_{i=1}^{n} (r - D_i) \cdot S_i \frac{\partial f}{\partial S_i} - rf = 0$$

2.4.4 Mehrdimensionale Fundamentallösung

Auch im mehrdimensionalen Fall kann man eine Fundamentallösung bestimmen, diese lautet:

$$
\begin{aligned}
f(S_1, \ldots, S_N, t) &= e^{-r(T-t)} \cdot \frac{1}{(2\pi(T-t))^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(\rho_{ij})}} \cdot \frac{1}{\sigma_1 \cdot \cdots \cdot \sigma_N} \cdot \\
&\cdot \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{Payoff(S'_1, \cdots, S'_N)}{S'_1 \cdots S'_N} \; e^{\left(-\frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha}^T \cdot (\rho_{ij})^{-1} \cdot \vec{\alpha}\right)} \cdot dS'_1 \cdot \cdots \cdot dS'_N
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{(T-t)}} \left(\log\left(\frac{S_i}{S'_i}\right) + (r - D_i - \frac{\sigma_i^2}{2}) \right) \cdot (T-t)
$$

2.4.5 Exchange-Option

tbd. ...

2.4.6 Erzeugung von korrelierten Zufallszahlen

Ziel sei es nun, zwei stochastische Prozesse

$$
dS_1 = \mu \cdot S_1 \cdot dt + \sigma_1 \cdot S_1 \cdot \sqrt{dt} \cdot \phi_1
$$

$$
dS_2 = \mu \cdot S_2 \cdot dt + \sigma_2 \cdot S_2 \cdot \sqrt{dt} \cdot \phi_2
$$

so zu erzeugen, dass diese nach einer Vorgabe korreliert sind.

Die Kovarianzmatrix sei:

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \; dt \\
&= \rho_{ij} \cdot (\sigma_i \sqrt{dt}) \cdot (\sigma_j \sqrt{dt})
\end{aligned}
$$

(d.h. den Faktoren Korrelationskoeffizient ij x Std.-Abweichung i x Std.-Abweichung j).

Konkret für den zweidim. Fall ausgeschrieben also:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \cdot dt = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot dt$$

Ansatz: man zerlege Σ nun so, dass

$$\Sigma = A^T \cdot A =: A^2$$

Sei dann

$$\vec{y} = A^T \cdot \vec{x}$$

wobei speziell im zweidim. der Vektor $\vec{x}$ ein zweikomponentiger Zufallsvektor von unkorrelierten Zufallszahlen ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_1, \phi_2 \; unkorr.$$

Die Komponenten des Vektors $\vec{y}$ sind dann korreliert und zwar mit der Kovarianzmatrix Σ; denn:

$$\vec{y}^T \cdot \vec{y} = (A \cdot \vec{x})^T \cdot (A \cdot \vec{x}) = (\vec{x}^T \cdot A^T) \cdot (A \cdot \vec{x}) = \vec{x}^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \cdot \Sigma \cdot \vec{x}$$

Die Bestimmung der Matrix A, die hier als Wurzel von Σ aufgefasst werden kann ($A^T \cdot A = \Sigma$), ist nicht eindeutig bestimmt. Am günstigsten erweist sich die Zerlegung der Matrix Σ nach Cholesky (Σ ist symmetrisch, pos. definit ...). Warum gerade Cholesky ist aufrgund der Gestalt der Zerlegungsmatrix zu sehen:

Für eine (2,2)-Matrix ist:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{dt}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{dt}$$

Die Multiplikation von A mit einem $\vec{x}$ verändert den Ergebnisvektor ggü. diesem Vektor in der ersten Komponente lediglich um den Faktor a_{11}. Alle weitere Komponenten können dann sukzessive ausgerechnet werden.

Das Produkt $A^T \cdot A$ lautet dann:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11} \cdot a_{21} \\ a_{11} \cdot a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} \cdot dt = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \cdot dt$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$a_{11}^2 = \sigma_1^2\ dt, \quad \Rightarrow a_{11} = \sigma_1\sqrt{dt}$$

$$a_{11} \cdot a_{21} = \sigma_1\sqrt{dt} \cdot a_{21} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\ dt, \quad \Rightarrow a_{21} = \rho_{21} \cdot \sqrt{dt} \cdot sigma_2$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = \rho_{12}^2\sigma_2^2 + a_{22}^2 = \sigma_2^2, \quad \Rightarrow a_{22} = \sigma_2\sqrt{1 - \rho_{21}^2} \cdot \sqrt{dt}$$

D.h.:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{dt} \cdot \sigma_1 \cdot \phi_1 \\ y_2 &= \sqrt{dt} \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_2 \cdot \phi_1 + \sqrt{dt} \cdot \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \cdot \sigma_2 \cdot \phi_2 \end{aligned}$$

3 Zinsmodelle

3.1 1-Factor-Zinsmodell

Bei der Betrachtung der Derivate war der Zins eine Konstante. Dieses soll jetzt realistischer modelliert werden und zwar mit Hilfe der stochastischen Prozesse. D.h. die Zinsen sind jetzt ebenfalls volatil (stochastischer Zins).

Die Spot-Rate ist der (Markt-) Zins für eine Anlage mit kürzester Laufzeit.

Die Anschauung ggü. Zinsen macht einem bereits so deutlich, dass das Verhalten weder log-normal, noch mit einem Drift behaftet sein kann.

Dementsprechend sieht der Ansatz für ein stochastisches Zinsmodell anders aus:

$$dr = u(r,t)\ dt + w(r,t)\ dX$$

Die Funktionen u und w sind zunächst noch unbestimmt.

Der Preis eines Bond unter stoch. Zinsen wäre:

$$B(r,t;T)$$

wobei T die Laufzeit des Bond ist.

Für die Bepreisung des stoch. Bonds ist kein Underlying verfügbar; denn das Underlying ist der Zins, das Derivat wäre der Bond ...

Der Ansatz zur (fairen) Bepreisung ist, ein Portfolio mit einem Underlying und einem Derivat aufzustellen. In diesem Fall ist das so nicht möglich. Die einzige Möglichkeit des Hedgings eines Bonds ist das hedgen mit einem anderen Bond (der dann eine andere Laufzeit besitzt).

D.h. der Portfolioansatz lautet nun: definiere ein Portfolio mit zwei Bonds:

$$\Pi = B_1(r,t;T_1) - \Delta \cdot B_2(r,t;T_2)$$

Weiterrechnen wie gehabt: bestimme $d\Pi$, beachte Ito, bestimme Δ so, dass das Portfolio risikolos wird. Im Einzelnen ergibt sich:

$$d\Pi = \frac{\partial B_1}{\partial t}\ dt + \frac{\partial B_1}{\partial r}\ dr + \frac{1}{2} w(r,t)^2 \cdot \frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2}\ dt - \Delta \left(\frac{\partial B_2}{\partial t}\ dt + \frac{\partial B_2}{\partial r}\ dr + \frac{1}{2} w(r,t)^2 \cdot \frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2}\ dt \right)$$

Die Stochastik, d.h. das Risiko, sind die dr-Terme. Wähle Δ so, dass diese verschwinden, dann ist das Portfolio risikolos. Das gelingt mit folgender Wahl:

$$\Delta = \frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}}$$

Das Portfolio soll sich ja risikolos verzinsen, d.h.:

$$d\Pi = r \cdot \Pi \cdot dt$$

Insgesamt erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t}+\frac{1}{2}w(r,t)^2\cdot\frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2}-\frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}}\left(\frac{\partial B_2}{\partial t}+\frac{1}{2}w(r,t)^2\cdot\frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2}\right)=r\left(B_1-\frac{\frac{\partial B_1}{\partial r}}{\frac{\partial B_2}{\partial r}}\cdot B_2\right)$$

Diese Gleichung kann man so umstellen, dass links die Terme mit B_1 und rechts die Terme mit B_2 sind:

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial r}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 B_1}{\partial r^2}-r\cdot B_1\right)=\left(\frac{\partial B_2}{\partial r}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial B_2}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 B_2}{\partial r^2}-r\cdot B_2\right)$$

Das ist eine Gleichung mit 2 Unbekannten !

Nun ist die linke Seite eine Funktion von T_1, die rechte eine von T_2. Beide Seiten müssen also von der Laufzeit der Bonds unabhängig sein !

Insgesamt folgt eine Gleichung der Form:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}-r\cdot B\right)=a(r,t)$$

Für die Funktion a wählt man eine Linearkombination der Funktionen aus dem Modell des stoch. Zinses in der Form:

$$a(r,t) = w(r,t)\cdot\lambda(r,t) - u(r,t)$$

Damit folgt die Bond-Preis-Gleichung:

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}+(u-\lambda\cdot w)\frac{\partial B}{\partial r}-r\cdot B=0$$

Damit die Lösung sinnvoll bestimmt werden kann, ist eine Randbedingung anzugeben. In diesem Fall ist die Randbedingung der Payoff des Bond B, d.h. die Rückzahlung des Bond zum Ende der Laufzeit. Kupon-Zahlungen $K(r,t)$ sind wie Dividenden zu behandeln:

Die Gleichung für den Preis des Bond mit Kupon-Zahlungen lautet dann:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (u - \lambda \cdot w) \frac{\partial B}{\partial r} - r \cdot B + K(r, t_k) = 0$$

wobei die Sprungbedingung an den Preis des Bond lautet:

$$B(r, t_k^-; T) = B(r, t_k^+; T) + K(r, t_k)$$

Interpretation von λ (als Marktpreis des Risikos): tbd. ...

3.2 Konkrete Zinsmodelle

3.2.1 Vasicek

$$dr = (\eta - \gamma \cdot r)\ dt + \sqrt{\beta}\ dX$$

Explizite Lösungen sind berechenbar; die Lösung für einen Zerobond lautet:

$$e^{A - r \cdot B}$$

mit

$$B = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma(T-t)}), \quad A = \frac{1}{\gamma^2}(B - T + t)(\eta \cdot \gamma - \frac{1}{2}\beta) - \frac{\beta \cdot B^2}{4\gamma}$$

3.2.2 Exkurs: Mean-Reverting Random Walk

Man betrachte:

$$dS = (\nu - \mu \cdot S)\ dt + \sigma\ dX$$

Ist S gross, dann wird dS kleiner 0, d.h. S wird im nächsten Zeitschritt kleiner als vorher.

Ist S klein, dann wird dS, bedingt durch die (positive) Konstante ν im nächsten Zeitschritt grösser.

D.h. S wird durch den Driftterm in Richtung $\frac{\nu}{\mu}$ korrigiert - allerdings wieder durch dX gestört ...

Diese Prozesse schwanken also um einen festen Wert herum; dieses gutartige Verhalten ist anschaulich sehr geeignet für Zinsen, da diese (normalerweise) nicht zu stark schwanken !

Diese Eigenschaft heisst Mean Reverting (MR).

Das Vasicek-Modell ist MR.

Aber: im Vasicek-Modell kann es zu negativen Zinsen kommen ...

3.2.3 Cox / Ingersoll / Ross (CIR)

$$dr = (\eta - \gamma \cdot r)\ dt + \sqrt{\alpha \cdot r}\ dX$$

r ist MR. Zudem ist $r > 0$, wenn:

$$\eta > \frac{\alpha}{2}$$

Ein Zerobond-Preis lautet dann:

$$e^{A-rB}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\alpha}{2}A &= a \cdot \Psi_2 \cdot \log(a - B) + \Psi_2 \cdot b \cdot \log\left(\tfrac{B+b}{b}\right) - a \cdot \Psi_2 \cdot \log(a) \\
B &= \tfrac{2 \cdot e^{\Psi_1 (T-t)} - 1}{(\gamma + \Psi_1)(e^{\Psi_1 (T-t)} - 1) + 2 \cdot \Psi_1} \\
\Psi_1 &= \sqrt{\gamma^2 + 2 \cdot \alpha} \\
\Psi_2 &= \tfrac{\eta}{a+b} \\
b &= \tfrac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha}}{\alpha} \\
a &= -b
\end{aligned}$$

3.2.4 Ho & Lee

$$dr = \eta(t)\ dt + \sqrt{\beta}\ dX$$

Bondpreis:

$$e^{A - r \cdot B}$$

mit

$$\begin{aligned}
B &= T - t \\
A &= \int\limits_t^T \eta(t)(T - s)\ ds + \tfrac{1}{6} \cdot \beta \cdot (T - t)^3
\end{aligned}$$

Dieses Modell lieferte das erste No-Arbitrage-Modell.

η muss gewählt werden:

$$\eta(t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \log Z_M(t^*; t) + \beta(t - t^*)$$

Der Zeitpunkt heute ist $t = t^*$.

$Z_M(t^*, T)$ ist der Marktpreis eines Zerobonds mit der Lufzeit T.

Ferner: Hull & White (eine Vasicek- und CIR-Erweiterung).

3.2.5 HJM-Modell

tbd. ...

4 Value at Risk (VaR)

4.1 Einleitung, Motivation

Aktienkurese sind zwar mit einem Risiko versehen, insb. mit dem Risiko eines (Kurs-) Verlustes. Nach unseren bisherigen Betrachtungen gehorchen die Kurse aber einem stochstischen Modell (dem einer geometrischen Brownschen Bewegung):

$$dS = S \cdot \mu \cdot dt + S \cdot \sigma\phi\sqrt{dt}$$

Fragt man sich, welcher Kursverlust bei einer Aktie - lt. diesem Modell - zu einer gewissen Wahrscheinlichkeit in einem gewissen Zeitraum höchstens eintreten kann, dann kann man sich der Statistik der Schätzung bedienen.

In der Statistik ist der Begriff der Konfidenz definiert. Angewandt auf die Betrachtungen hier, stellt sich die Frage:

Mit welcher "statistischen Sicherheit" von 95% oder 99% (dem Konfidenzniveau) liegt der Aktiernkurs nicht unter einem gewissen x_0 ?

Als Formel geschrieben ist also das x_0 aus der folgenden Gleichung zu ermitteln:

$$P(x \leq x_0) = 1 - \alpha$$

wobei α gerade das Konfidenzniveau ist.

(Anm.: abgefragt wird hier also der <u>einseitige</u> Konfidenzbereich !)
Für die Normalverteilung gilt:

- $\alpha = 95\%$: 1,6448

- $\alpha = 99\%$: 1,3263

Diese Werte werden über die Inverse der Standard-Normalverteilungsfunktion errechnet.

4.2 Gleichung ohne Drift

Zunächst sei also kein Drift vorgesehen (d.h. $\mu = 0$). Für eine Aktie ist dann der Term

$$\sigma \cdot \phi \cdot \sqrt{dt}$$

zu betrachten.

Mit den Betrachtungen aus der Einleitung ergibt sich:

$$P(S \leq S^{VaR}) = 1 - \alpha$$

Für eine Konfidenz von 99% ergibt sich:

$$S^{VaR} = \sigma \cdot 2,3263 \cdot \sqrt{t} \cdot S_0$$

Beispiel:

Sei t eine Woche (d.h. $t = 1/52$), $S_0 = 100$, $\sigma = 0,2$, dann ist

$$S^{Var} = 0,2 \cdot 2,3263 \cdot \sqrt{\frac{1}{52}} \cdot 100 = 6,45$$

D.h. mit einer statistischen Sicherheit von 99% liegt der Aktienkurs nach einer Woche noch über $100 - 6,45 = 93,55$.

4.3 Gleichung mit Drift

Ist $\mu > 0$, dann errechnet man als VaR-Wert für eine stat. Sicherheit von 99%:

$$S^{VaR} = S_0(\mu \cdot t - \sigma\sqrt{t} \cdot 2,3263$$

4.4 Portfolio mit gleichen Aktien

Sind in einem Portfolio Δ Stück gleicher Aktien, dann folgt als VaR-Wert für eine stat. Sicherheit von 99%:

$$S^{VaR} = \Delta \cdot S_0(\mu \cdot t - \sigma\sqrt{t} \cdot 2,3263$$

4.5 Portfolio mit mehreren ungleichen Aktien

Sind in einem Portfolio unterschiedliche und mehr als eine Aktie enthalten, dann muss die Korrelation der Aktien zueinander berücksichtigt werden.

Mit:

- ρ_{ij} dem Korrelationskoeffizienten
- Δ_i gleich der Anzahl der Aktien i im Portfolio
- σ_i der Volatilität der Aktie
- $dS_i = \mu_i \cdot S_i \cdot dt + \sigma_i \cdot S_i \cdot dX_i$
- $E[dX_i \cdot dX_j] = \rho_{ij} \cdot dt$
- $E[dX_i] = 0$
- $E[(dX_i)^2] = dt$

folgt:

$$S^{VaR\ Portfolio} = 2,3263 \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M} \Delta_i \Delta_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j}$$

(Konfidenzniveau hier: 99%)

4.6 VaR für Derivate

tbd. ...

5 Kreditrisiko

5.1 Einleitung, Motivation

Bonds sind Kreditaufnahmen von Unternehmen, die ihren Kapitalbedarf (z.T.) durch Kredite finanzieren. Unternehmerisches Handeln ist mit einem Risiko versehen; ein Unternehmen kann illiquide werden (also seinen Zahlungsverpflichtungen nicht mehr nachkommen), bankrott oder in Konkurs gehen.

In diesem Fall sind die Zahlungen der Kupons des Bond oder sogar die Rückzahlung zu spät oder gar nicht mehr gewährleistet.

Dieses Unternehmensrisiko muss also als Risiko auf die Bonds übertragen werden und in der Kalkulation der Bond-Preise berücksichtigt werden können.

In der Praxis werden Unternehmen geratet (Moodys, Standard & Poors, etc.). Ein schlechtes Rating führt zu niedrigeren Preisen (Risikoabschlag).

Betrachtet man sich eine Barwertberechnung:

$$PV = \sum_{k=1}^{N} \frac{Z_{t_k}}{(1+i)}$$

Für gleich bleibende Zahlungen Z_{t_k} muss, damit der PV kleiner wird, der Nenner der Diskontierung erhöht werden. Z.B. ein Zuschlag zum Zins leitest das gewünschte:

$$PV = \sum_{k=1}^{N} \frac{Z_{t_k}}{(1+i+r)}$$

$r \geq 0$ wäre dann ein Risikozuschlag.

Die Frage, die sich nun ergibt, lautet: ob und - falls ja - wie kann dieses Prinzip (des additiven Zuschlages beim Zins) bei Bondpreisen realisiert werden ?

5.2 Modell für ein Rerating

Das Rating gibt Auskunft darüber, wie riskant ein Unternehmen - und damit dessen Bonds - eingeschätzt werden.

Zu modellieren ist ein Rerating; d.h. eine Veränderung dieser Einschätzung. Dieses Rerating ist nicht kontinuierlich, sondern plötzlich (also diskret).

Einen solchen Sprung (dessen Wahrscheinlichkeit mit der Zeit zunimmt), kann dargestellt werden durch einen Poisson-Prozess:

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{mit WS} \quad 1 - \lambda \, dt \\ 1 & \text{mit WS} \quad \lambda \, dt \end{cases}$$

λ bezeichnet die Intensität des Poisson-Prozesses.

5.2.1 Konstante Wahrscheinlichkeit

Einfachst möglich angesetzt sei λ zunächst konstant.

p sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Rerating statt findet. D.h. p ist konstant, die Wahrscheinlichkeit, dass das Unternehmen gleich geratet wird, ist $1 - p \, dt$, und dafür, dass es Rerating stattfindet: $p \, dt$.

Sei $P(t;T)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Unternehmung nicht ge-reratet wird. Es folgt:

$$P(t' + dt', T) - P(t', T) = p\ dt \cdot P(t', T)$$

D.h.:

$$\frac{\partial P}{\partial t'} = p \cdot P(t', T)$$

Mit $P(T;T) = 1$ folgt als Lösung:

$$P(t;T) = e^{-p(T-t)}$$

Für einen Zerobond mit Risiko $Z_r = Z_r(t)$ mit Rückzahlung $Z_r(T) = 1$ folgt als erwartete Auszahlung P(Z(T)):

$$P(Z(T)) = e^{-p(T-t)} \cdot Z_0$$

wobei Z_0 der Wert eines risikolosen Zerobond ist (mit gleicher Laufzeit wie Z_r) ist.

Nun betrachte man den Yield to Maturity. Der Wert eines (risikolosen) Zerobond lautet (y sei der Zinssatz):

$$Z(t;T) = e^{-y(T-t)}$$

D.h.

$$y = \frac{\ln(Z)}{T-t}$$

In diese Formel wird nunder Wert des Zerobond mit Risiko eingesetzt:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{\ln(e^{-p(T-t)} \cdot Z)}{T-t} \\ &= \tfrac{\ln(Z)}{T-t} + p \end{aligned}$$

Das Risiko eines Reratings führt also direkt zu einer additiven Konstante, einem Spread, im Zins.

5.2.2 Der Bondpreis

Für Bonds wurde ein (ggü. Zinsänderungen) risikoloses Portfolio durch Hedging zweier Bonds mit unterschiedlichen Lufzeiten. Hier nun der Ansatz, dass ein mit dem Risiko des Reratings behafteter Bond durch einen risikolosen Zerobond gehedgt werden kann:

$$\Pi = V(r,p,t) - \Delta \cdot Z(r,t)$$

Die Reratingmöglichkeiten des Bond führen zu einer Fallunterscheidung. Betrachtet werden die beiden Wahrscheinlichkeiten für ein Rerating:

1. Der Bond wird nicht neu geratet:

Die Berechnung der Portfolioänderung $d\Pi$ führt auf:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}dt\right) + \frac{\partial V}{\partial r}dr - \Delta\left(\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}dt\right) + \frac{\partial Z}{\partial r}dr\right)$$

In diesem Fall kann Δ - wie gehabt - so gewählt werden, dass die dr-Terme verschwinden.

2. Der Bond wird neu geratet:

In diesem Fall kann man zeigen, dass der plötzliche Verlust von der folgenden Form ist:

$$d\Pi = -V + O(\sqrt{dt})$$

Insgesamt ergibt sich dann als Gleichung für den Preis des Bonds:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (-\lambda \cdot w)\frac{\partial V}{\partial r} - (r+p)\cdot V = 0$$

Also wiederum zu einem Spread-Term.

5.2.3 Stochastisches Kredit-Risiko

Das Kreditrisiko soll nun als variabel angesetzt werden. Sinn macht es also, für dieses Risiko eine stochastische Gleichung zu definieren:

$$dp = \gamma(r,p,t)\ dt + \delta(r,p,t)\ dX_1$$

wobei:

$$dr = u(r,t)\ dt + w(r,t)\ dX_2$$

Die Zufallsvariablen hier sind (i.a.) nicht als unabhängig anzunehmen, d.h. es gibt eine Korrelation (ausgedrückt durch den Korrelationskoeffizienten ρ) zwischen dX_1 und dX_2.

Der Ansatz sei wie oben: Hedging eines Bond mit Risiko durch einen ohne Risiko:

$$\Pi = V(r,p,t) - \Delta \cdot Z(r,t)$$

Wieder werden die beiden Fälle 'Bond wird neu geratet' und 'Bond wird nicht neu geratet' unterschieden:

1. Bond wird nicht neu geratet:

Dann ergibt sich als Änderung des Portfolios:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho\ w\ delta\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial p} + \frac{1}{2}\delta^2\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)\ dt + \frac{\partial V}{\partial r}\ dr + \frac{\partial V}{\partial p}\ dp - \Delta\left(\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\right)\ dt + \right.$$

2. Bond wird neu geratet:

In diesem Fall gilt wieder:

$$d\Pi = -V + O(\sqrt{dt})$$

Insgesamt folgt dann als Gleichung für den Bondpreis:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho \, w \, delta \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial p} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} + \gamma \frac{\partial V}{\partial p} - (r + p) \, V = 0$$

Die Randbedingung lautet:

$$V(r, p, T) = 1$$

6 Realoptionen oder Komplexe Optionen