Inhalt

Berechnung von Zinsen

- ***Einfache oder lineare Verzinsung***
  = Berechnung der Zinsen von Anfang bis zum Ende einer Finanztransaktion

$$NV_n = NV_0 \cdot (1 + i_l \cdot LZ)$$

- ***Exponentielle Verzinsung oder Zinseszinsrechnung***
  = Berechnung der Zinsen unter Berücksichtigung der Wiederanlage

$$NV_n = NV_0 \cdot (1 + i_e)^{LZ}$$

- ***Stetige oder kontinuierliche Verzinsung***
  = Berechnung der Zinsen unter stetiger Wiederanlage

$$NV_n = NV_0 \cdot e^{i_s \cdot LZ} = NV_0 \cdot \exp(i_s \cdot LZ)$$

Zinsrechnungskonventionen (Day Count Convention)

Bei Laufzeiten kleiner einem Jahr kommen die folgenden Zins-rechnungskonventionen zur Berechnung der anteiligen Zinszahlungen zum Einsatz:

$$\frac{\text{Zinstage der Laufzeit}}{\text{Zinstage pro Jahr}}$$

- ***30/360*** Deutsche Methode
  = Das Zinsjahr hat 360 Tage, der Zinsmonat 30.
- ***act/360*** EURO-Zinsmethode
  = Das Zinsjahr hat 360 Tage, der Zinsmonat wird exakt ausgezählt.
- ***act/act*** Englische Methode
  = Das Zinsjahr und der Zinsmonat werden exakt ausgezählt.
- ***act/365***
  = Das Zinsjahr hat 365 Tage, der Zinsmonat wird exakt ausgezählt.
- ***30/365***
  = Das Zinsjahr hat 365 Tage, der Zinsmonat 30.

Anleihen

sind Schuldverschreibungen mit einer festen oder variablen, im Anleihevertrag fixierten Verzinsung sowie einer festen Laufzeit.

Klassische Anleihen, auch als ***Plain-Vanilla-Anleihen*** oder ***Straight Bonds*** bekannt, zeichnen sich aus durch das Versprechen des Schuldners (Emittenten) zu bestimmten Zeitpunkten (Kupontermine, Rückzahlungstermin) festgelegte Zahlungen (Kupon, Tilgungsbetrag/Principal Payment) zu leisten.

Schuldverschreibungen/Anleihen/Obligationen

werden in Teilschuldverschreibungen verbrieft, sind i.d.R. Inhaberpapiere und werden charakterisiert durch den *Nennwert (Face Value)*, den *Nominalzins/Kupon*, den *Ausgabebetrag* ($\Rightarrow$ Emissionsrendite) und die *Laufzeit/Fälligkeit*. ($\rightarrow$Term Sheet)

Anleihen

Bzgl. der Verzinsung unterscheidet man

- ***Festzinsanleihen*** (regelmäßiger Festzins)
- ***Floating Rate Note*** (regelmäßiger variabler Zins)
- ***Zero Bonds*** (Diskontpapiere)
- Anleihen mit Optionsrechten (Cap/Floor) (→ Modul Produkte und Geschäfte am Kapitalmarkt)

Anleihen unterschiedlicher Emittenten:

- Anleihen des Bundes und sonstige öffentliche Anleihen
  ⇒ Hohe Standardisierung der Instrumente und Verfahren!
- Pfandbriefe (Anleihen von Hypothekenbanken)
- Industrieanleihen

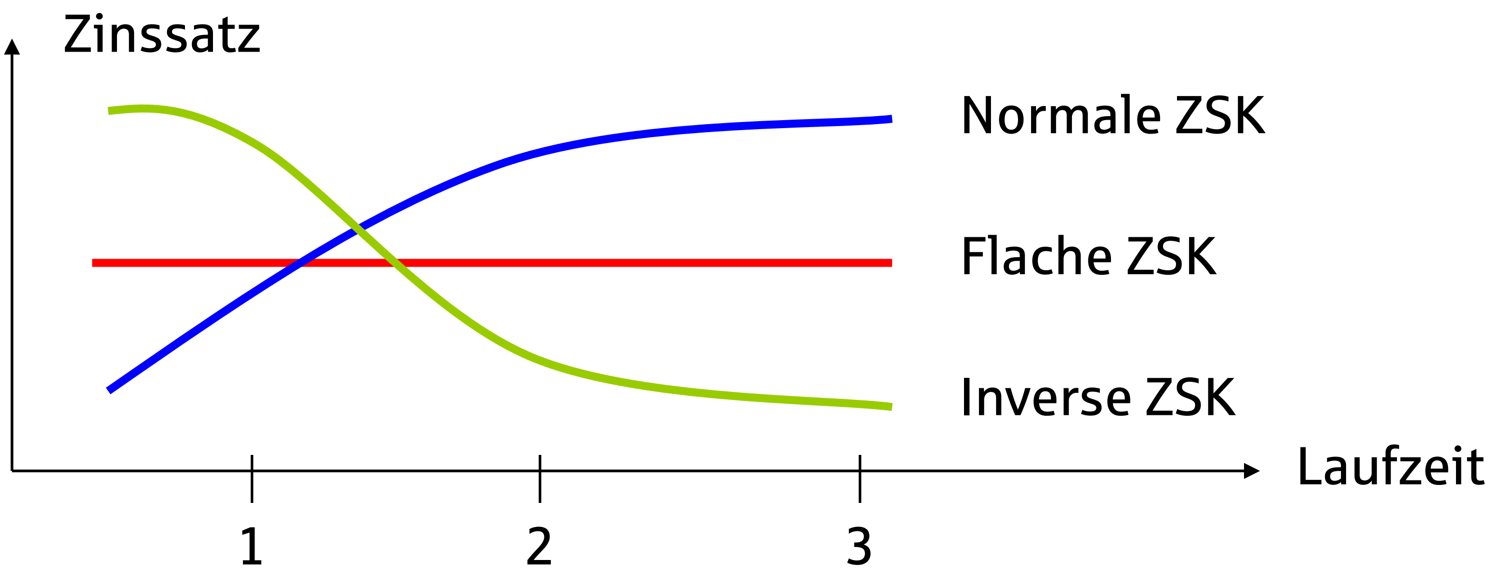
⇒ Bonitätsrisiko privater Anleihen beachten!

Zinsstrukturkurven (ZSK)

ordnen einer Laufzeit den entsprechenden Zinssatz des Geld- oder Kapitalmarktes zu.

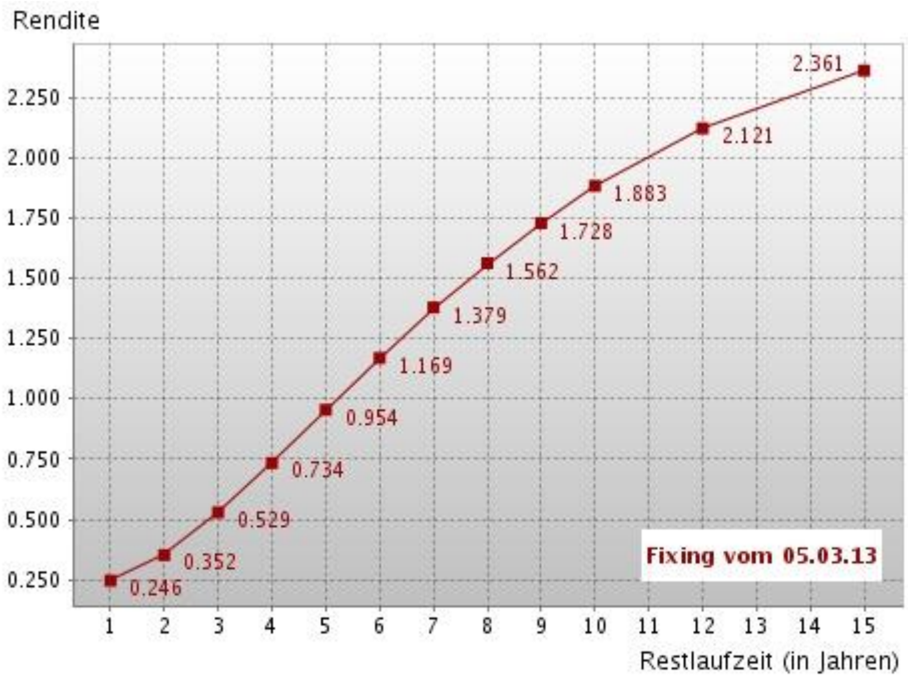
Laufzeit	1	2	3
Zinsatz	x%	y%	z%

Man unterscheidet dabei



Zinsstrukturkurven in der Praxis

Renditen der öffentlichen Pfandbriefe



Quelle: Verband der deutschen Pfandbriefbanken

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

„Zwei Zahlungen, die an unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgen, sind genau dann gleichwertig, wenn ihre Zeitwerte bezogen auf den gleichen Zeitpunkt übereinstimmen."

⇒ Was ist der Zeitwert und wie wird er berechnet?

➢ Barwert oder Anfangswert
= heutiger Wert eines zukünftigen Zahlungsstroms
„Was müsste ich heute investieren um die Zahlung in der Zukunft zu erhalten?"

➢ Endwert
= Wert eines Zahlungsstroms am Ende der Laufzeit.

⇒ Berechnung mittels Zinsstrukturkurven

Zugrundeliegende Annahmen der

- Friktionsloser Markt
  ⇒ keine Berücksichtigung von Transaktionskosten, Steuern, Preisauf- und –abschlägen für das Bonitäts- und Transaktionsrisiko oder für Short-Positionen

- Keine Unterscheidung zwischen Soll- und Habenzins.
  ⇒ Berechnung werden zu Mid-Preisen ausgeführt (Quotierung in Bid und Ask)

- Die Marktteilnehmer haben keinen Einfluss auf die Kursentwicklung der betrachteten Finanzinstrumente.

- Arbitragemöglichkeiten sind ausgeschlossen.
  ⇒ **Gesetz des einen Preises** = Zwei Finanzinstrumente mit identischen Zahlungsströmen haben den gleichen Preis.

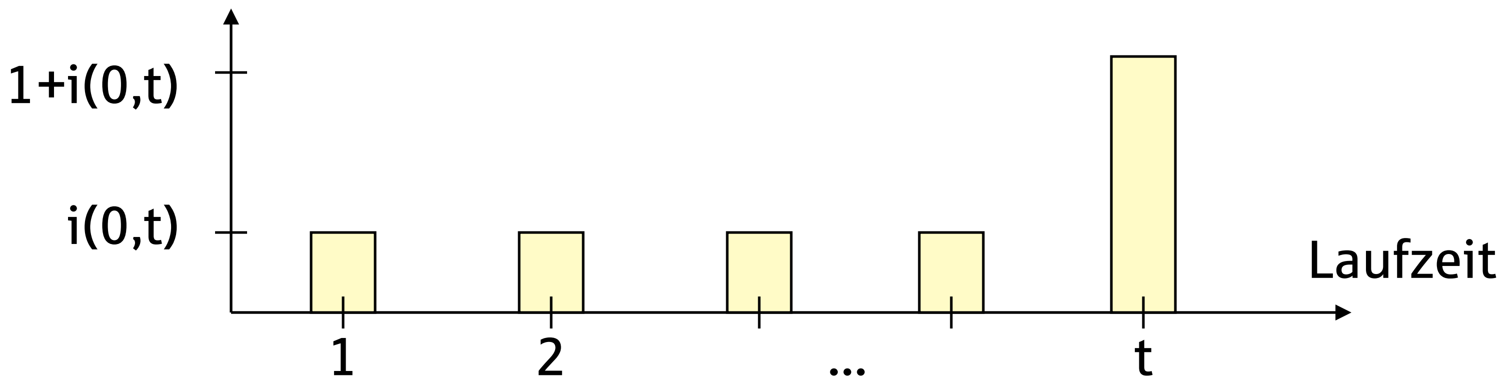
Zinsstruktur der Kuponzinssätze

wird ermittelt aus den Kuponsätzen von repräsentativen Anleihen (oder alternativ auch aus Swapzinssätzen).

i(0,t) bezeichnet dabei den Kupon einer Anleihe mit **jährlicher Zinszahlung** und endfälliger Tilgung im Zeitpunkt t, die im Zeitpunkt 0 zu einem Kurs von 100 emittiert wird.

Cash Flow einer Kuponanleihe mit Nominal 1€

Laufzeit	1	2	3
i(0,t)	x%	y%	z%



Zinsstruktur der Nullkuponzinssätze

wird berechnet aus der Zinsstruktur der Kuponzinssätze (da Nullkuponanleihen eher selten).

z(0,t) bezeichnet dabei den jährlichen Zinssatz, der über die Laufzeit **thesauriert** und mit der Tilgung am Ende der Laufzeit gezahlt wird.

Cash Flow einer Nullkupon-anleihe mit Nominal 1€

Laufzeit	1	2	3
z(0,t)	x%	y%	z%

Zinssätze am Markt am Beispiel der Emissionen des Bundes

Kurse / Renditen börsennotierter Bundeswertpapiere vom 05.03.13

ISIN 1)	Bezeichnung 2) 5)	Fälligkeit	Rest-laufzeit J /M	Emiss.-volumen Mrd EUR	Kurs 3) vom 05.03.2013	Rendite in %	Netto-Rendite 4) in %	Kurs plus Stückzinsen 6)
DE000 **113733** 9	**1,500 BSA 11**	15.03.2013	0 / 0	18,0	**100,037**	-0,19	-0,14	**101,504**
DE000 **114152** 1	**3,500 BO S 152**	12.04.2013	0 / 1	17,0	**100,348**	-0,03	-0,02	**103,503**
DE000 **103051** 8	**2,250 BO 07 index.**	15.04.2013	0 / 1	11,0	**99,550**	6,55	-	**115,048**
DE000 **113734** 7	**1,750 BSA 11**	14.06.2013	0 / 3	17,0	**100,477**	-0,01	-0,01	**101,752**
DE000 **113523** 4	**3,750 Bund 03**	04.07.2013	0 / 3	22,0	**101,223**	0,00	0,00	**103,750**
DE000 **113735** 4	**0,750 BSA 11**	13.09.2013	0 / 6	17,0	**100,390**	0,00	0,00	**100,750**
DE000 **114153** 9	**4,000 BO S 153**	11.10.2013	0 / 7	16,0	**102,388**	0,00	0,00	**103,999**
DE000 **113736** 2	**0,250 BSA 11**	13.12.2013	0 / 9	15,0	**100,187**	0,01	0,01	**100,245**
DE000 **113524** 2	**4,250 Bund 03**	04.01.2014	0 / 9	24,0	**103,523**	0,01	0,00	**104,245**
DE000 **113737** 0	**0,250 BSA 12**	14.03.2014	1 / 0	15,0	**100,253**	0,00	0,00	**100,511**
DE000 **114154** 7	**2,250 BO S 154**	11.04.2014	1 / 1	19,0	**102,449**	0,01	0,01	**104,483**
DE000 **113738** 8	**0,000 BSA 12**	13.06.2014	1 / 3	15,0	**99,979**	0,02	0,01	**99,979**
DE000 **113525** 9	**4,250 Bund 04**	04.07.2014	1 / 3	25,0	**105,612**	0,02	0,01	**108,476**
DE000 **113739** 6	**0,000 BSA 12**	12.09.2014	1 / 6	15,0	**99,972**	0,02	0,01	**99,972**
DE000 **114155** 4	**2,500 BO S 155**	10.10.2014	1 / 7	17,0	**103,950**	0,02	0,02	**104,964**
DE000 **113740** 4	**0,000 BSA 12**	12.12.2014	1 / 9	14,0	**99,953**	0,03	0,02	**99,953**
DE000 **113526** 7	**3,750 Bund 04**	04.01.2015	1 / 9	23,0	**106,828**	0,02	0,01	**107,465**

Quelle: Bundesrepublik Deutschland Finanzagentur

Zerobond-Ab- und -Aufzinsungsfaktoren

können berechnet werden aus der Zinsstruktur der Kuponzinssätze und/oder falls bekannt aus der Zinsstruktur der Nullkuponzinssätze.

ZBAF(0,t) transformiert einen zukünftigen Zahlungsstrom in t auf den Bewertungszeitpunkt 0 (heute). Die Zerobond-Abzinsungsfaktoren geben die heutigen Preise von marktkonformen Nullkuponanleihen (Zero Bonds) wieder. $\Rightarrow$ Barwertrechnung!!!
Zusammenhang mit Nullkuponzinsen: $ZBAF(0,t) = (1 + z(0,t))^{-t}$

Mit ZBUF(0,t) werden Zerobond-Aufzinsungsfaktoren bezeichnet, diese transformieren einen heutigen Zahlungsstrom in die Zukunft auf den Zeitpunkt t. Sie geben die zukünftige Zahlung einer Kapitalzuwachsanleihe an. $\Rightarrow$ Endwertrechnung!!!
Zusammenhang mit Nullkuponzinsen:

$$ZBUF(0,t) = (1 + z(0,t))^{t} = \frac{1}{ZBAF(0,t)}$$

Zinsstruktur der Forward-Nullkuponzinssätze

wird berechnet aus der Zinsstruktur der Nullkuponzinssätze.

z(t,LZ) bezeichnet denjenigen Zinssatz, der heute für eine (thesaurierende) Mittelanlage oder –aufnahme in t Jahren für LZ Jahre vereinbart wird.

Berechnung der Forward-Zinsen durch

$$z(t,LZ) = \left(\frac{(1+z(0,t+LZ))^{t+LZ}}{(1+z(0,t))^{t}} \right)^{\frac{1}{LZ}} - 1$$

oder alternativ mit

$$z(t,LZ) = \left(\frac{ZBAF(0,t)}{ZBAF(0,t+LZ)} \right)^{\frac{1}{LZ}} - 1 = \left(\frac{ZBUF(0,t+LZ)}{ZBUF(0,t)} \right)^{\frac{1}{LZ}} - 1$$

$\Rightarrow$ Berechnung von Forward-Zerobond-Abzinsungsfaktoren

$\Rightarrow$ Verschiebung der Wertstellung auf einen Zwischenzeitpunkt

Zinsstruktur der Forward-Kuponzinssätze

wird berechnet aus den Zerobond-Abzinsungsfaktoren.

i(t,LZ) bezeichnet denjenigen Zinssatz, der heute für eine Mittelanlage oder –aufnahme in t Jahren für LZ Jahre mit jährlicher Ausschüttung vereinbart wird.

Berechnung der Forward-Kuponzinsen durch

$$i(t, LZ) = \frac{1 - ZBAF(t, LZ)}{\sum_{n=1}^{LZ} ZBAF(t, n)}$$

wobei

$$ZBAF(t, LZ) = \frac{ZBAF(0, t + LZ)}{ZBAF(0, t)}$$

der Forward-Zerobondabzinsungsfaktor in t mit Laufzeit LZ.

Falls LZ=1 gilt z(t,1)=i(t,1).

Zinsstruktur der Forward-Nullkuponzinssätze

Grundidee (Duplikation) der impliziten Forward-Nullkuponzinsen:
Unter der Annahmen eines arbitragefreien Marktes muss gelten

0	t	t+LZ
-1 $\longrightarrow$		$(1+ z(0,t+LZ))^{t+LZ}$
+1 $\longrightarrow$	$-(1+(z(0,t))^{t}$	0
	$+(1+(z(0,t))^{t}$ $\longrightarrow$	$-(1+z(0,t))^{t}\cdot(1+ z(t,LZ))^{LZ}$
0	0	0

$$\Rightarrow (1+ z(0,t+LZ))^{t+LZ} = (1+z(0,t))^{t}\cdot(1+ z(t,LZ))^{LZ}$$

Berechnung der Nullkuponzinsen und ZBAF

Schrittweise Berechnung der Zerobond-Abzinsungsfaktoren und damit der Nullkuponzinssätze unter der Annahme des arbitragefreien Marktes (Duplizierung der Zahlungsströme) im sog. ***Arbitragetableau***:

0	1	2	…	t-1	t
$\pm P_t$?	$\pm i(0,t) \cdot P_t$	$\pm i(0,t) \cdot P_t$		$\pm i(0,t) \cdot P_t$	$\pm(1+i(0,t)) \cdot P_t$ $=1$
$\pm P_{t-1}$?	$\pm i(0,t-1) \cdot P_{t-1}$	$\pm i(0,t-1) \cdot P_{t-1}$		$\pm(1+i(0,t-1)) \cdot P_{t-1}$	0
				0	0
$\pm$ ZBAF(0,t)	0	0		0	1

Berechnung der Nullkuponzinsen, ZBAF und Forwards

<u>Beispiel</u>: ZSK der Kuponzinsen

Laufzeit	1	2	3
i(0,t)	3%	4%	5%

0	1	2	3
-0,9524	5% → 0,0476	5% → 0,0476	5% → 0,9524 0,0476 } =1
+0,0458	4% → -0,0018	4% → -0,0458 -0,0018	0
+0,0445	3% → -0,0445 -0,0013	0	0
Σ			
-ZBAF(0,3) =-0,8621	0	0	1

Berechnung der Nullkuponzinsen, ZBAF und Forwards

<u>Beispiel</u>: ZSK der Kuponzinsen

Laufzeit	1	2	3
i(0,t)	3%	4%	5%

0 1 2

-0,9615 → 0,9615

4% 0,0385 4% 0,0385 $\Big\}$ =1

+0,0374 → -0,0374 0

3% -0,0011

Σ

-ZBAF(0,2)=-0,9241 0 1

ZBAF(0,1)=$(1+0{,}03)^{-1}$=0,9709

Berechnung der Nullkuponzinsen, ZBAF und Forwards

<u>Beispiel</u>: ZSK der Kuponzinsen

Laufzeit	1	2	3
i(0,t)	3%	4%	5%

Alternative Berechnung der ZBAFs mit der Formel

$$ZBAF(0,t) = \frac{1}{1+i(0,t)} - \sum_{n=1}^{t-1} \frac{i(0,t)}{\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+i(0,t-k)\right)\right)}$$

$$ZBAF(0,3) = \frac{1}{1,05} - \frac{0,05}{1,05 \cdot 1,04} - \frac{0,05}{1,05 \cdot 1,04 \cdot 1,03} = 0,8621$$

$$ZBAF(0,2) = \frac{1}{1,04} - \frac{0,04}{1,04 \cdot 1,03} = 0,9242$$

$$ZBAF(0,1) = \frac{1}{1,03} = 0,9709$$

Berechnung der Nullkuponzinsen, ZBAF und Forwards

Berechnung der Nullkuponzinsen aus den ZBAF mittels

$$z(0,t) = ZBAF(0,t)^{-\frac{1}{t}} - 1$$

$z(0,3)=0{,}8621^{-1/3}-1=5{,}0705\%$
$z(0,2)=0{,}9241^{-1/2}-1=4{,}0257\%$
$z(0,1)=3\%$

Berechnung der Forward-Zinsen mit Laufzeit 1 Jahr: z(t-1,1)
$z(0,1)=3\%$
$z(1,1) = [(1+z(0,2))^2/(1+z(0,1))^1]^1-1=[1{,}0403^2/1{,}03]^1-1$
$= 5{,}0703\%$
$z(2,1) = [(1+z(0,3))^3/(1+z(0,2))^2]^1-1=[1{,}0507^3 /1{,} 0403^2]^1-1$
$= 7{,}1813\%$

Berechnung der Nullkuponzinsen, ZBAF und Forwards

Laufzeit t	1	2	3
i(0,t)	3%	4%	5%
ZBAF(0,t)	0,9709	0,9241	0,8621
z(0,t)	3%	4,03%	5,07%
z(t-1,1)	3%	5,07%	7,18%

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. *Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit*
3. Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen
4. Derivative Finanzinstrumente
5. Forwards und Futures
6. Zinsswaps
7. Aktienoptionen
8. Anleihenoptionen
9. Zinsoptionen

Barwertberechnung

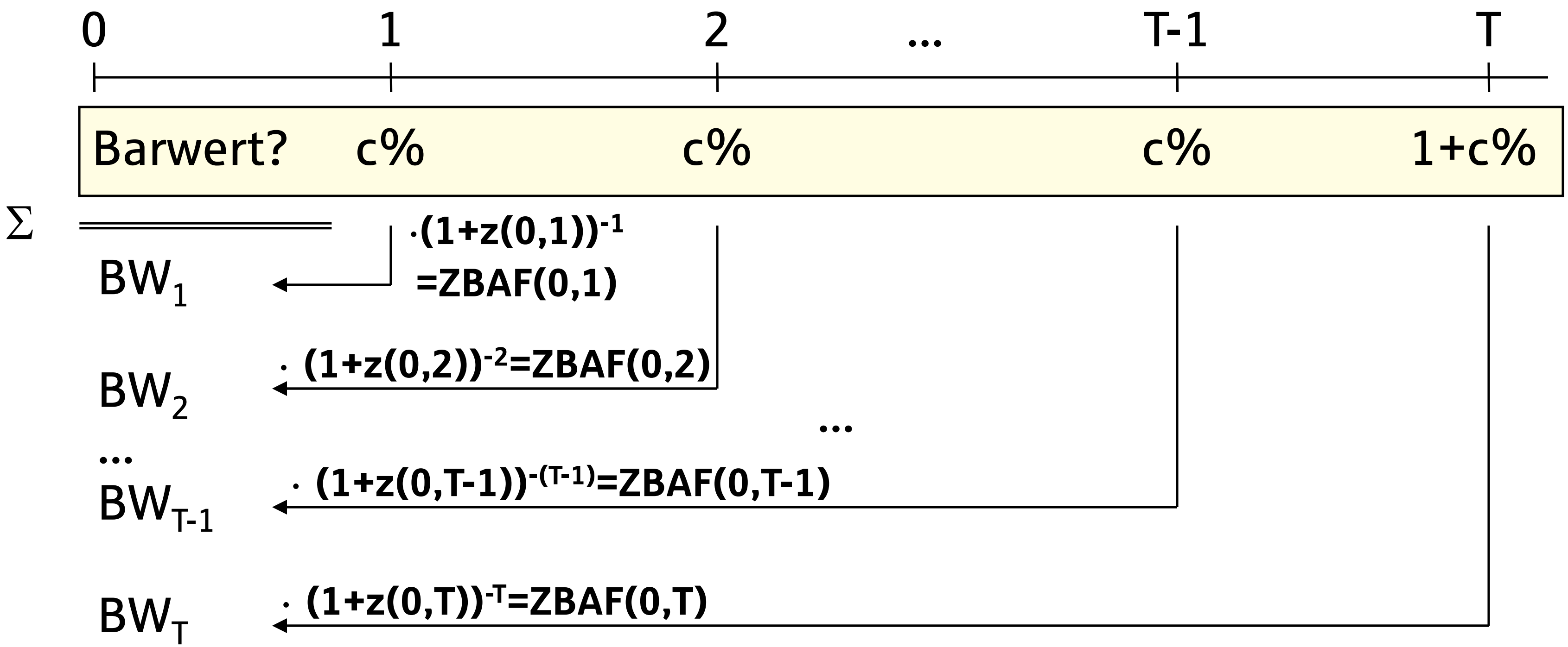
durch

- ***Diskontierung des Zahlungsstroms mit Zerobond-Abzinsungs-faktoren bzw. Nullkuponzinsen***

- ***Duplizierung des Zahlungsstroms der zu bewertenden Anleihe mittels der Zinsstruktur der Kuponzinsen***
  im Arbitragetableau

Barwertberechnung durch Diskontierung

Bewertung einer Anleihe mit einem festen Kupon von c% und einer Laufzeit von T Jahren durch Abzinsung der einzelnen Zahlungsströme auf den heutigen Zeitpunkt



Barwertberechnung durch Duplizierung

Bewertung einer Anleihe mit einem festen Kupon von c% und einer Laufzeit von T Jahren durch schrittweise Duplikation

	0	1	2	...	T-1	T
	-Barwert?	c%	c%		c%	1+c%
Σ						
	$-P_T$?	$i(0,T)\cdot P_T$	$i(0,T)\cdot P_T$		$i(0,T)\cdot P_T$	$\left.\begin{matrix} P_T + \\ i(0,T)\cdot P_T \end{matrix}\right\} = 1+c\%$
	$-P_{T-1}$?	$i(0,T-1)\cdot P_{T-1}$	$i(0,T-1)\cdot P_{T-1}$		$(1+i(0,T-1))\cdot P_{T-1}$	0
	...	...	...	...	0	0
	$-P_1$?	$i(0,1)\cdot P_1$	0	...	0	0

Barwertberechnung

Beispiel:
ZSK der Kupon- und Nullkuponzinsen

Laufzeit	1	2	3
i(0,t)	3,00%	4,00%	5,00%
ZBAF(0,t)	0,9709	0,9241	0,8621
z(0,t)	3,00%	4,03%	5,07%

Berechnung des Barwerts einer Festzinsanleihe mit Laufzeit von drei Jahren, einem jährlichen Kupon von 5,5% und einem Nominal von 100.000€.

Barwertberechnung durch Diskontierung

0	1	2	3
Barwert?	5.500	5.500	105.500

Σ

5.339,95 ← $\cdot 1{,}03^{-1} = 0{,}9709$

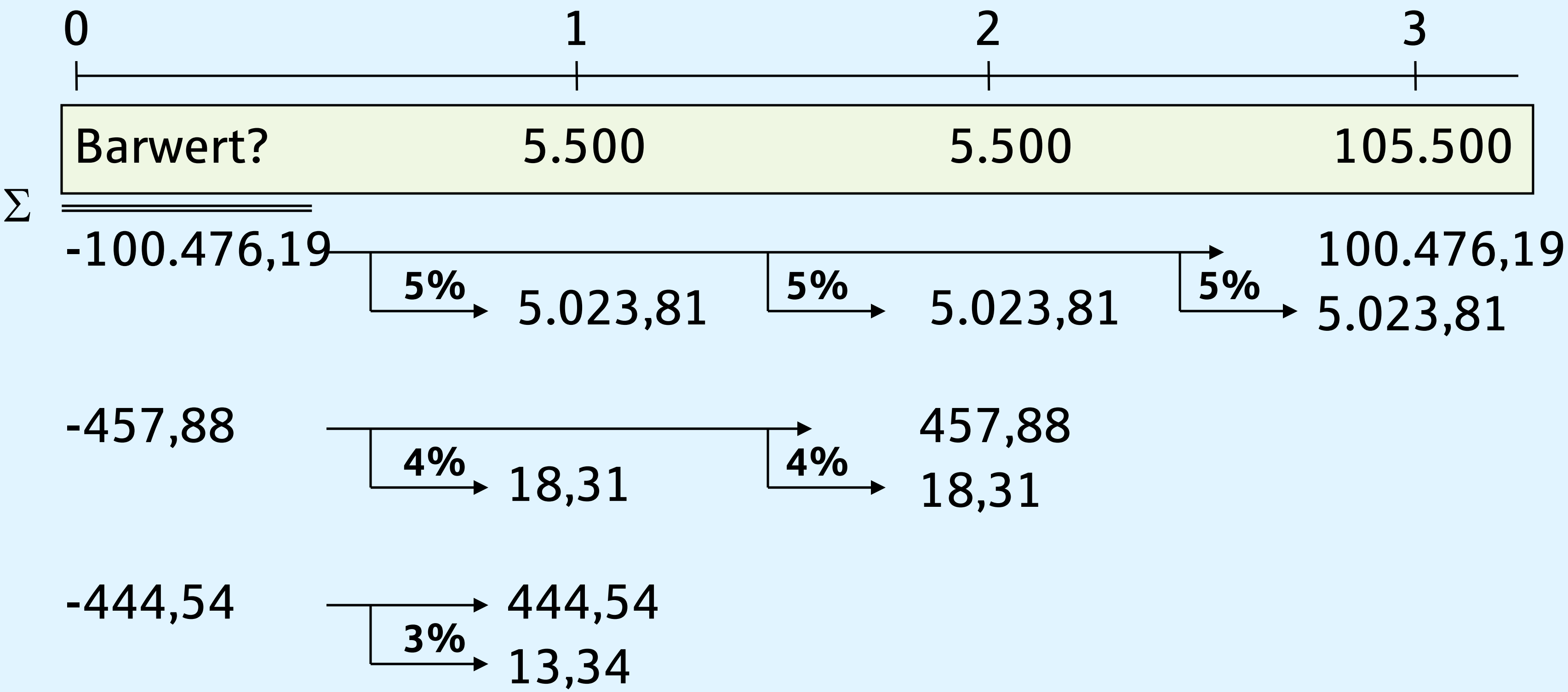
5.082,55 ← $\cdot\ 1{,}0403^{-2} = 0{,}9241$

90.951,55 ← $\cdot\ 1{,}0507^{-3} = 0{,}8621$

Der Barwert berechnet sich aus der Summe der diskontierten Zahlungsströme:

Barwert = 5.339,95 + 5.082,55 + 90.951,55 = 101.374,05 €

Barwertberechnung durch Duplizierung



Der Barwert berechnet sich aus der Summe der duplizierenden Zahlungsströme:

Barwert = 100.476,19 + 457,88 + 444,54 = 101.378,61 €

Flache Zinsstrukturkurve

Die Annahme einer ***flachen Zinsstrukturkurve***

Laufzeit	1	2	3	...
i(0,t)	x%	x%	x%	...

führt zur Vereinfachung der Situation, denn damit gilt, dass alle anderen Zinsstrukturen ebenfalls konstant sind:

Laufzeit	1	2	3	...
z(0,t)	x%	x%	x%	...
z(t-1,LZ)	x%	x%	x%	...

Vorsicht: Diese Annahme ist stark vereinfachend und nicht realistisch!

Rendite bis Fälligkeit

Die ***Rendite bis Fälligkeit*** oder auch ***Yield to Maturity*** ist die konstante Verzinsung, zu der sich ein festverzinsliches Wertpapier über die verbleibende Laufzeit verzinst.

An einem Zinstermin kann man die ***Yield to Maturity y*** einer Festzinsanleihe mit Laufzeit T und einem jährlichen Kupon von c% berechnen durch die Bedingung

$$\text{Kurs der Anleihe} = \sum_{t=1}^{T} c\cdot(1+y)^{-t} + 100\cdot(1+y)^{-T}$$

⇒ Bei einer normalen oder inversen ZSK wird die Yield to Maturity mittels einem numerischen Iterationsverfahren berechnet (NICHT Gegenstand dieses Moduls!!!), es sei denn, es handelt sich um Nullkuponanleihen.

Rendite bis Fälligkeit

⇒ Bei einer flachen ZSK gilt immer, dass die
Yield to Maturity = konstanter Kuponzins
= konstanter Nullkuponzins!

⇒ Determinanten der Yield to Maturity sind die aktuelle ZSK, die Restlaufzeit und die Cash Flow-Struktur (Kupon, Tilgung) des zugrundeliegenden Wertpapiers.

Notiert die Anleihe

- unter pari (Kurs<100), so liegt die Yield to Maturity über dem vereinbarten Kupon
- über pari (Kurs>100), so liegt die Yield to Maturity unter dem vereinbarten Kupon.
- zu pari (Kurs=100), so ist die Yield to Maturity gleich dem Kupon der Anleihe.

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit
3. *Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen*
4. Derivative Finanzinstrumente
5. Forwards und Futures
6. Zinsswaps
7. Aktienoptionen
8. Anleihenoptionen
9. Zinsoptionen

Bewertung von Anleihen

= Berechnung des heutigen „fairen“, arbitragefreien Kurses mittels Barwertverfahren (Diskontierung!) unter Berücksichtigung der heutigen Zinsstruktur, des Bonitätsrisikos, der Liquidität des zugrundeliegenden Marktes, etc.

Annahme:

Wir betrachten in diesem Modul Anleihen ohne Bonitätsrisiko, die an einem liquiden Markt gehandelt werden und benutzen daher das einfache Barwertverfahren!

Der Kurs einer Anleihe berechnet sich <u>in einem Kupontermin</u>, in dem man den Barwert der Zahlungsströme durch den Nennwert der Anleihe teilt.

$$\text{"fairer" Kurs} = \frac{\text{Barwert}}{\text{Nennwert}} \quad [\%]$$

Berechnung des Kaufpreises und der Stückzinsen

Die Berechnung von Stückzinsen ist notwendig, wenn die Anleihe an einem Zeitpunkt <u>zwischen zwei Kuponterminen</u> bewertet werden soll.

Stückzinsen *(accrued interest)* sind die seit dem letzten Kupontermin bis zum Bewertungszeitpunkt (Valuta des Kaufs/Verkaufs/Emission der Anleihe) aufgelaufenen Zinsen aus dem Kupon.

$$\text{Stueckzinsen} = \text{Nennwert} \cdot \text{Kuponzins} \cdot \frac{\text{Zinstage seit dem letztem Kupondatum}}{\text{Zinstage pro Jahr}}$$

Dabei ist die vereinbarte Zinskonvention der Anleihe zu beachten!

Berechnung des Kaufpreises und der Stückzinsen

Im Börsenkurs oder dem Barwert der Anleihe, der zur Berechnung des ***Clean Price***

$$Clean\ Price = \ Börsenkurs \cdot Nennwert = \ Barwert - Stückzinsen$$

herangezogen wird, sind die Stückzinsen nicht enthalten.
$\Rightarrow$ Vermeidung von Kurssprüngen aufgrund von Kuponzahlungen

Das ergibt den eigentlichen Kaufpreis (Dirty Price) der Anleihe

$$Dirty\ Price = Clean\ Price + Stückzinsen$$

Berechnung des Kaufpreises einer Anleihe

Wir betrachten wieder eine Festzinsanleihe mit Laufzeit von drei Jahren, einem jährlichen Kupon von 5,5% und einem Nominal von 100.000€.

Der Kurs der Anleihe beträgt 107,89 [%].
Nehmen wir an, dass die Anleihe ihren Kupon am 1. August zahlt, wir aber beabsichtigen, die Anleihe zum 30. Juni des gleichen Jahres zu kaufen. Ferner liegt der Anleihe die Zinskonvention 30/360 zugrunde. Die Anleihe hat einen Nennwert von 1.000€, bei einer Investition von 100.000 € haben wir also 100 Teilschuldverschreibungen gekauft.

Berechnung des fairen Kaufpreises einer Anleihe

1. Berechnung der Stückzinsen pro Anleihe
Stückzinsen pro Anleihe = 1.000 · 5,5% · (329/360) = 50,26 €
Gesamtstückzinsen der Investition= 50,26 · 100 = 5.026 €

2. Berechnung des fairen Kaufpreises
Fairer Kaufpreis der Anleihe
= Fairer Kurs · Nennwert/100 + Stückzinsen
= 107,89 %· 1.000 + 50,26 = 1.078,90 + 50,26 = 1.129,16 €
Fairer Kaufpreis der Investition
= 100 · 1.129,16 = 112.916 €
Vergleichsgrundlage für den Dirty Price

Nullkupon-Anleihen / Zero Bonds

- *„Echte"* ***Zero Bonds***
  Der Emittent eines Zero Bonds begibt die Wertpapiere zu einem diskontierten Nennwert, der am Ende der Laufzeit getilgt wird.
- ***Kapitalzuwachsanleihen*** (Zinssammler)
  werden zu pari (mit einem Kurs von 100) emittiert und zu einem Nennwert über pari (inklusive Zinsaufschlag) getilgt.

Bewertung von Nullkupon-Anleihen durch

- (Duplizierung der Zahlungsströme mittels Kuponzinsen)
- Vergleich der Kurse mit impliziten Zinsstrukturen (Diskontierung)
  $\Rightarrow$ Bei echten Zero Bonds müssen unter der Annahme des arbitragefreien Marktes die Kurse mit den entsprechen ZBAFs gleicher Laufzeit übereinstimmen.

Variabel verzinsliche Anleihen (Floating Rate Notes)

sind Schuldverschreibungen mit variabler Verzinsung, d.h. die Zinsfestlegungsdauer ist kürzer als die Laufzeit des Floaters und die Zinszahlungen sind an einen Referenzzins (z.B. EURIBOR, LIBOR) gekoppelt.

Beispiel: Zins = EURIBOR+ Zinsaufschlag
wobei der Zinsaufschlag (Zinsspread) das Bonitätsrisiko des Emittenten wiedergibt.

Verzinst sich der Floater ohne Zinsaufschlag, so quotiert er am Zinsanpassungstermin zu 100!

⇒ Die Zahlungsströme der Anleihe sind a priori unbekannt.
⇒ Bewertung von Floatern mittels Forward Rates

Zwischen zwei Zinsanpassungsterminen ist zu beachten, dass die Höhe der nächsten Kuponzahlung bekannt ist und dass die Stückzinsen wie bereits erwähnt berechnet werden müssen.

Barwertberechnung eines Floaters

Beispiel:
ZSK der Kupon- und Nullkuponzinsen

Laufzeit	1	2	3
i(0,t)	3%	4%	5%
ZBAF(0,t)	0,9709	0,9241	0,8621
z(0,t)	3%	4,03%	5,07%
z(t-1,1)	3%	5,07%	7,18%

Berechnung des Barwerts einer Floating Rate Note mit Laufzeit von drei Jahren, einem jährlichen Kupon von 12M-EURIBOR +10 BP und einem Nominal von 100.000€ an einem Zinsanpassungstermin.

Barwertberechnung durch Diskontierung und Forwardzins

0	1	2	3
Barwert?	3.100	5.170	107.280

Σ

3.009,79 $\leftarrow \cdot 1{,}03^{-1} = 0{,}9709$

4.777,60 $\leftarrow \cdot\ 1{,}0403^{-2} = 0{,}9241$

92.486,09 $\leftarrow \cdot\ 1{,}0507^{-3} = 0{,}8621$

$\Rightarrow$ Barwert = 3.009,79 + 4.777,60 + 92.486,09 = 100.273,48 €

$\Rightarrow$ Fairer Kurs des Floaters = 100.273,48 /100.000 = 100,27 [%]

Kurswertrisiken

Anleihen unterliegen einem Kurswert- und Zinsänderungsrisiko.

Veränderliche Einflussfaktoren auf den fairen Kurs einer Anleihe

- Zinsstruktur am Bewertungszeitpunkt
- Restlaufzeit der Anleihe
- Zwischenzeitliche Zinszahlungen und Cash Flow-Veränderungen

⇒ Isolierte Betrachtung der einzelnen Einflussfaktoren zur genauen Identifikation des

- Marktzinsänderungseffektes (MZE)
  ⇒ Reaktion des Kurses auf eine Zinsänderung
- Restlaufzeitverkürzungseffektes (Zinsstrukturkurven-rutscheffekt ZSKE), „rolling down the yield curve“)
  ⇒ Reaktion des Kurses auf eine Restlaufzeitveränderung bei einer gleichbleibenden Zinsstruktur
- Effektes des Cash Flow-Veränderung

Restlaufzeitverkürzungs – und Marktzinsänderungseffekt

Beispiel:
ZSK der Nullkuponzinsen

Laufzeit	1	2	3	4	5
z(0,t)	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%	7,00%

Wir betrachten eine Investition in eine Festzinsanleihe in t=0 mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren, einem festen Kupon von 6,5% und einem Nominal von 100.000€.

Dann beträgt der Barwert der Investition in t=0

$$BW_0 = 6.500 \cdot 1{,}03^{-1} + 6.500 \cdot 1{,}04^{-2} + 6.500 \cdot 1{,}05^{-3} + 6.500 \cdot 1{,}06^{-4} + 6.500 \cdot 1{,}07^{-5} + 100.000 \cdot 1{,}07^{-5} = 99.016{,}88\ €$$

Restlaufzeitverkürzungs – und Marktzinsänderungseffekt

1. Berechnung des Barwertes in t=1 unter der Annahme, dass sich die Zinsstruktur in t=1 um 50 Basispunkte = 0,5% nach oben verschieben wird (Shift der ZSK):

Laufzeit	1	2	3	4	5
z(0,t)	3,50%	4,50%	5,50%	6,50%	7,50%

$\Rightarrow$ $BW_1 = 6.500 \cdot 1{,}035^{-1} + 6.500 \cdot 1{,}045^{-2} + 6.500 \cdot 1{,}055^{-3}$
$+ 6.500 \cdot 1{,}065^{-4} + 100.000 \cdot 1{,}065^{-4} =$ 100.552,84 €

2. Berechnung des Restlaufzeitverkürzungseffektes durch Berechnung des Barwerts der Investition in t=1 unter der Annahme der ursprünglichen ZSK

$\Rightarrow$ $BW_{ZSKE}= 6.500 \cdot 1{,}03^{-1} + 6.500 \cdot 1{,}04^{-2} + 6.500 \cdot 1{,}05^{-3}+ 6.500 \cdot 1{,}06^{-4}$
$+ 100.000 \cdot 1{,}06^{-4} = 102.293{,}21$ €

$\Rightarrow$ Restlaufzeitverkürzungseffekt
$ZSKE= BW_{ZSKE}-BW_0 = 102.293{,}21- 99.016{,}88 =3.276{,}33$

Restlaufzeitverkürzungs – und Marktzinsänderungseffekt

3. Berechnung des Marktzinsänderungseffektes

$\Rightarrow$ $MZE = BW_1 - BW_{ZSKE} = 100.552{,}84 - 102.293{,}21 = -1.740{,}37$ €

Im Allgemeinen gilt

$$\mathbf{BW_1 = BW_0 + ZSKE + MZE.}$$

Der Effekt der Cash-Flow-Veränderung besteht in der wegfallenden Kuponzahlung im Zeitpunkt t=1 in der Höhe von 6.500 €.

Messung von Kurswertrisiken bei flacher ZSK

Die ***(Macauley-) Duration*** bestimmt den Zeitpunkt, zu dem sich die Wirkung des aufgrund einer Zinsänderung steigenden/fallenden Endwertes und des fallenden/steigenden Barwertes gegenseitig kompensieren.

- Die Duration gibt die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer einer Anleihe in Jahren an und bestimmt somit den Zeitpunkt, an dem eine Anleihe frei von Zinsänderungsrisiken ist.

- Je niedriger die Duration, desto schneller fließt das investierte Kapital zurück und das Zinsänderungsrisiko sinkt.
  $\Rightarrow$ mögliches Auswahlkriterium bei Entscheidung zwischen Anleihen mit gleicher Yield to Maturity

Messung von Kurswertrisiken bei flacher ZSK

Die Macauley-Duration ***D*** setzt den Barwert der mit den Zahlungszeitpunkten gewichteten Zahlungen ins Verhältnis zum Barwert am Betrachtungszeitpunkt:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \cdot CF_t \cdot (1+y)^{-t}}{BW}$$

wobei
CF_t = Zahlungsstrom der Anleihe im Zeitpunkt t
y = Yield to Maturity der Anleihe
t = Zeitindex
T = Restlaufzeit der Anleihe
BW = Barwert der Anleihe in t=0 mit

$$BW = \sum_{t=1}^{T} CF_t \cdot (1+y)^{-t}$$

Messung von Kurswertrisiken bei flacher ZSK

Weitere Eigenschaften der Macauley-Duration:

- Die Duration D ist immer kleiner oder gleich der Restlaufzeit der zu beurteilenden Anleihe.
- Die Duration eines Zero Bonds ist immer gleich seiner Restlaufzeit.
- Mit sinkender Restlaufzeit sinkt die Duration.
- Je höher die Yield to Maturity einer Anleihe, desto kleiner ihre Duration.
- Je höher die Zahlungsströme (Kupon), desto kleiner die Duration.

Macauley-Duration

<u>Beispiel</u>:

Wir betrachten wieder unsere Investition in eine Festzinsanleihe in t=0 mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren, einem festen Kupon von 6,5% und einem Nominal von 100.000€. Diese hat eine Yield to Maturity von 6,74%. Wir wissen, dass der Barwert der Anleihe 99.016,88 € beträgt.

1. Berechnung des Zählers aus der Duration

$\sum_{t=1}^{T} t \cdot CF_t \cdot (1+y)^{-t}$

$= \quad 1 \cdot 6.500 \cdot 1{,}0674^{-1} + 2 \cdot 6.500 \cdot 1{,}0674^{-2} + 3 \cdot 6.500 \cdot 1{,}0674^{-3}$
$\quad + 4 \cdot 6.500 \cdot 1{,}0674^{-4} + 5 \cdot 6.500 \cdot 1{,}0674^{-5} + 5 \cdot 100.000 \cdot 1{,}0674^{-5}$

$= \quad 6.089{,}56 + 11.410{,}09 + 16.034{,}41 + 20.029{,}24 + 23.455{,}64$
$\quad + 360.856{,}07 = 437.875{,}01$

2. Berechnung der Macauley-Duration

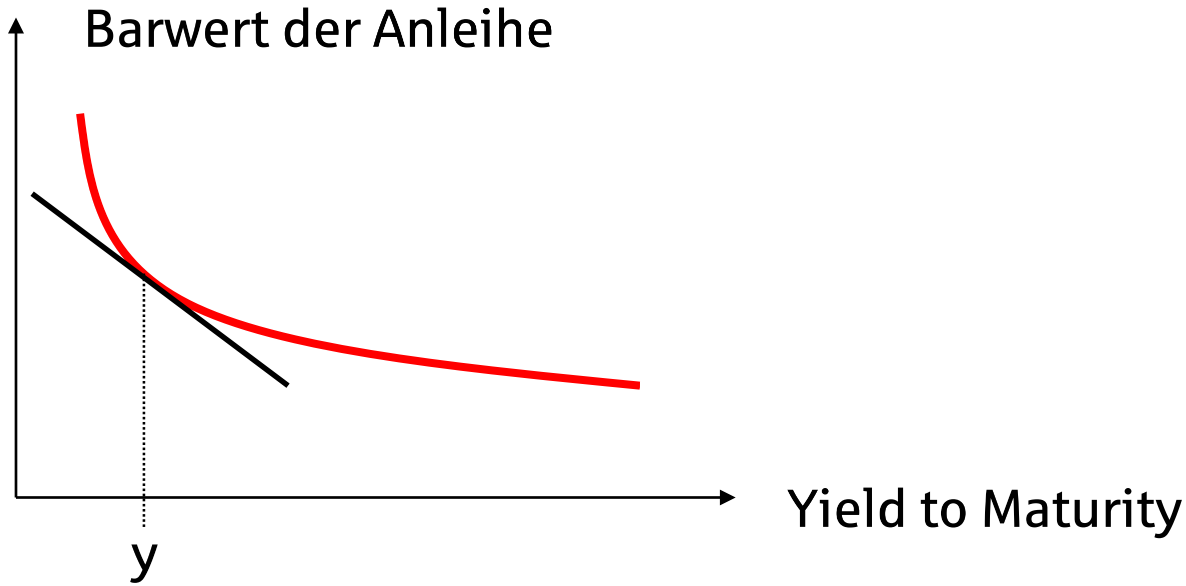
$D \quad = \; 437.875{,}01 / 99.016{,}88 = 4{,}4222$

$\Rightarrow$ Die durchschnittliche Kapitalbindungsdauer der Anleihe beträgt ungefähr vier Jahre und fünf Monate.

Messung von Kurswertrisiken bei flacher ZSK

Die ***Modified Duration*** gibt die relative Kurssensitivität einer Anleihe bezüglich linearer Zinsänderungen (Yield to Maturity) an.

Dabei wird ein Parallel-Shift der flachen Zinsstruktur im Bewertungszeitpunkt unterstellt. Die Annahme der flachen ZSK bleibt erhalten!



Messung von Kurswertrisiken bei flacher ZSK

Die ***Modified Duration MD*** setzt die Ableitung des Barwerts nach der Yield to Maturity ins Verhältnis zum Barwert selbst:

$$MD = \frac{-\sum_{t=1}^{T} t \cdot CF_t \cdot (1+y)^{-t-1}}{BW} = -\frac{D}{1+y}$$

$\Rightarrow$ Näherung für die relative Marktwertänderung

$$\Delta BW_{rel} = \frac{BW(y+\Delta y) - BW(y)}{BW(y)} \approx MD \cdot \Delta y$$

$\Rightarrow$ Näherung für die absolute Marktwertänderung

$$\Delta BW_{abs} = BW(y+\Delta y) - BW(y) \approx MD \cdot \Delta y \cdot BW$$

Vorsicht: Die Modified Duration führt zu einer systematischen Unterbewertung der Anleihen!

Modified Duration

Beispiel:
Wir betrachten wieder unsere Investition in eine Festzinsanleihe in t=0 mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren, einem festen Kupon von 6,5%, einem Nominal von 100.000€ und einer Yield to Maturity von 6,74%. Die Macauley Duration der Anleihe beträgt 4,4221. Wir wissen, dass der Barwert der Anleihe 99.016,88 € und somit der Kurs 99,02 [%] beträgt. Wie verändert sich der ***Kurs*** der Anleihe bei Verschiebung der ZSK um 50 BP mit der Modified Duration?

1. Berechnung der Modified Duration

$MD = -D/(1+y) = -4{,}4222 /1{,}0674 = -4{,}1430$

2. Berechnung der relativen Kurswertänderung

$\Delta\, BW_{rel} \approx MD \cdot \Delta\, y = -4{,}1430 \cdot 0{,}50\% = -\ 0{,}0207 =-2{,}07\%$

3. Berechnung der absoluten Kurswertänderung

$\Delta\, BW_{abs} \approx MD \cdot BW \cdot \Delta\, y = -0{,}0207 \cdot 99{,}02 = -2{,}0497$

Modified Duration

4. Vergleich mit der tatsächlichen Kurswertänderung

Die Yield to Maturity steigt um 50 BP auf 7,24%.

$$BW_{neu} = (6.500 \cdot 1{,}0724^{-1} + 6.500 \cdot 1{,}0724^{-2} + 6.500 \cdot 1{,}0724^{-3} + 6.500 \cdot 1{,}0724^{-4} + 6.500 \cdot 1{,}0724^{-5} + 100.000 \cdot 1{,}0724^{-5})/100.000 = 96{,}99 \text{ in } [\%]$$

$\Rightarrow$ $\Delta BW_{abs} = 96{,}99 - 99{,}02 = -2{,}03$ in [%]

und $\Delta BW_{rel} = -2{,}03/99{,}02 = -0{,}0205$

5. Berechnung der absoluten Barwertänderung mit der Modified Duration

$\Delta BW_{abs} \cdot 100.000/100 = -2{,}0497 \cdot 1.000 = -2.049{,}70$ €

Messung von Kurswertrisiken bei flacher ZSK

Die ***Convexity*** beschreibt die Änderung der Modified Duration in Abhängigkeit von linearen Zinsänderungen (Yield to Maturity) und soll somit die systematische Unterbewertung durch die Modified Duration korrigieren (Krümmung der Kurve).
Die ***Convexity CV*** setzt die zweite Ableitung des Barwerts nach der Yield to Maturity ins Verhältnis zum Barwert selbst:

$$CV = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \cdot (t+1) \cdot CF_t \cdot (1+y)^{-t-2}}{BW}$$

$\Rightarrow$ Näherung für die relative Marktwertänderung

$$\Delta BW_{rel} \approx MD \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot CV \cdot \Delta y^2$$

$\Rightarrow$ Näherung für die absolute Marktwertänderung

$$\Delta BW_{abs} \approx MD \cdot BW \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot CV \cdot BW \cdot \Delta y^2$$

Convexity

Beispiel:

Wir betrachten wieder unsere Investition in eine Festzinsanleihe in t=0 mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren, einem festen Kupon von 6,5%, Yield to Maturity von 6,74% und einem Kurs von 99,02 [%]. Ferner beträgt die Modified Duration der Anleihe MD = -4,1430.

1. Berechnung der Convexity

$$(\sum_{t=1}^{T} t \cdot (t+1) \cdot CF_t \cdot (1+y)^{-t-2})/BW = \ldots = 22{,}31$$

2. Berechnung der relativen Barwertänderung

$$\Delta BW_{rel} = MD \cdot \Delta y + 0{,}5 \cdot CV \cdot (\Delta y)^2$$
$$= -4{,}1430 \cdot 0{,}50\% + 0{,}5 \cdot 22{,}31 \cdot (0{,}50\%)^2 = -0{,}0204 = -2{,}04\%$$

3. Berechnung der absoluten Barwertänderung

$$\Delta BW_{abs} = MD \cdot BW \cdot \Delta y + 0{,}5 \cdot BW \cdot CV \cdot (\Delta y)^2 = -2{,}0200$$

Messung von Kurswertrisiken bei nicht flacher ZSK

Die ***Key Rate Duration*** beschreibt die relative Sensitivität einer Anleihe bzgl. der Änderung einer Nullkuponzinsrate z(0,t) mit signifikanter Laufzeit. Die Gesamtsensitivität einer Anleihe lässt sich durch ein Bündel von Key Rates beschreiben.
Die ***Key Rate Duration KRD_t*** setzt die negative partielle Ableitung des Barwerts nach der Key Rate ins Verhältnis zum Barwert selbst:

$$KRD_t = \frac{t \cdot CF_t \cdot (1 + z(0,t))^{-t-1}}{BW}$$

$\Rightarrow$ Näherung für die relative Marktwertänderung

$$\Delta BW_{rel} \approx -KRD_t \cdot \Delta z(0,t)$$

Messung von Kurswertrisiken bei nicht flacher ZSK

Die ***Basispoint Value BPV_t*** beschreibt die absolute Sensitivität einer Anleihe bzgl. der Änderung einer Nullkuponzinsrate z(0,t) mit signifikanter Laufzeit um einen BP und basiert auf der gleichen Idee wie die Key Rate Duration.

$$BPV_t = t \cdot CF_t \cdot (1 + z(0,t))^{-t-1} \cdot 0{,}0001$$

$\Rightarrow$ Näherung für die absolute Marktwertänderung für eine Änderung des Nullkuponzinses z(0,t) um BP_t Basispunkte

$$\Delta BW_{abs} \approx -BPV_t \cdot \Delta BP_t$$

Basispoint Values

<u>Beispiel</u>:
ZSK der Nullkuponzinsen

Laufzeit	1	2	3	4	5
z(0,t)	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%	7,00%

Wir betrachten wieder unsere Investition in eine Festzinsanleihe in t=0 mit einer Restlaufzeit von 5 Jahren, einem festen Kupon von 6,5% und einem Nominal von 100.000€. Der Barwert der Investition in t=0 beträgt 99.016,88 €.

Uns interessiert, wie sich der Barwert der Anleihe in einem kurzfristigen Zinsszenario verändert, das unterstellt, dass sich die Zinsen in den ersten drei Jahren um 25 BP erhöhen, im vierten und fünften Jahr aber um 10 BP sinken.

Basispoint Values

Berechnung der Basispoint Values

$BPV_1 = 1 \cdot 6.500 \cdot (1+0{,}03)^{-2} \cdot 0{,}0001 = 0{,}6127$ €/BP

$BPV_2 = 2 \cdot 6.500 \cdot (1+0{,}04)^{-3} \cdot 0{,}0001 = 1{,}1557$ €/BP

$BPV_3 = 3 \cdot 6.500 \cdot (1+0{,}05)^{-4} \cdot 0{,}0001 = 1{,}6043$ €/BP

$BPV_4 = 4 \cdot 6.500 \cdot (1+0{,}06)^{-5} \cdot 0{,}0001 = 1{,}9429$ €/BP

$BPV_5 = 5 \cdot 106.500 \cdot (1+0{,}07)^{-6} \cdot 0{,}0001 = 35{,}4827$ €/BP

Näherung der absolute Kurswertänderung

$\Delta BW_1 = -0{,}6127 \cdot 25 = -15{,}3175$

$\Delta BW_2 = -1{,}1557 \cdot 25 = -28{,}8925$

$\Delta BW_3 = -1{,}6043 \cdot 25 = -40{,}1075$

$\Delta BW_4 = -1{,}9429 \cdot (-10) = +19{,}429$

$\Delta BW_5 = -35{,}4827 \cdot (-10) = +354{,}827$

Änderung des Barwertes der Anleihe

$\Delta BW = \Delta BW_1 + \Delta BW_2 + \Delta BW_3 + \Delta BW_4 + \Delta BW_5 = +289{,}94$ €

Messung von Kurswertrisiken bei nicht flacher ZSK

Besonderheiten für Floating Rate Notes

- Die Duration und Modified Duration eines Floaters sind kleiner gleich der verbleibenden Zeit bis zur nächsten Zinszahlung.

- Das Zinsänderungsrisiko eines Floaters wird lediglich durch eine eventuell bereits fixierte nächste Zinszahlung verursacht.
  $\Rightarrow$ Relevanz des entsprechenden Nullkuponzinses bei Nutzung der Key Rate Duration und der Basispoint Values.

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit
3. Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen
4. *Derivative Finanzinstrumente*
5. Forwards und Futures
6. Zinsswaps
7. Aktienoptionen
8. Anleihenoptionen
9. Zinsoptionen

Derivative Finanzinstrumente

Unterscheidung bzgl. der Erfüllung des Finanzgeschäftes

- ***Bedingte, asymmetrische derivative Finanzinstrumente,***
  bei denen für den Käufer des Derivats ein Wahlrecht besteht, die Lieferung oder Abnahme des zugrundeliegenden Basiswertes oder eine Ausgleichszahlung zu verlangen.
- ***Unbedingte, symmetrische derivative Finanzinstrumente,***
  bei denen zwischen Käufer und Verkäufer eine feste, verbindliche Liefer- und Abnahme- bzw. Zahlungsverpflichtung besteht.

Unterscheidung bzgl. des Handelsplatzes (Tertiärmarkt)

- ***Börsengehandelte Derivate (Traded Derivatives)***
  sind standardisierte derivative Finanzgeschäfte wie Futures und Traded Options $\Rightarrow$ EUREX
- ***OTC(Over-the-Counter)-Derivate***
  sind außerbörslich gehandelte Derivate wie Swaps, Forwards und speziell zugeschnittene Optionen

Derivative Finanzinstrumente

Unterscheidung bzgl. des zugrunde liegenden Basiswertes

- ***Finanzderivate (Financial Derivatives)***
  mit einem Finanztitel als Underlying $\Rightarrow$ Zinssätze, Anleihen, Aktien
- ***Warenderivate (Commodity Derivatives)***
  legen als Basiswert den Wert eines bestimmten Handelsgutes zugrunde.
- ***Kreditderivate (Credit Derivatives)***
  hängen vom Ausfallrisiko eines Kredits oder eines Kreditportfolios ab (Zinsaufschlag, Ausfallhöhe,...)
- ***Makroderivate (Economic Derivatives)***
  beziehen sich auf die Entwicklung einer makroökonomischen Kennzahl (Inflation, Bruttosozialprodukt,...)
- ***Wetterderivate, Katastrophenderivate, ...***
  sind in ihrer Wertenwicklung abhängig vom Eintritt eines vorher festgelegten Ereignisses (Stürme, Erdbeben, ...)

Forwards

sind unbedingte Termingeschäfte, bei dem die verbindliche Lieferung an einem zukünftigen Zeitpunkt, dem ***Erfüllungszeitpunkt***, durch den Verkäufer des Forwards zu einem bei Abschluss vereinbarten Preis, dem ***Forward-Preis***, an den Käufer vereinbart wird.

Der Käufer eines Forwards besitzt eine ***Long-Position***, der Verkäufer eine ***Short-Position***.

Man spricht von einem ***Future***, wenn dieses Geschäft durch einen standardisierten Vertrag über die Börse abgeschlossen wird.
$\Rightarrow$ Vorteil der Konzentration der Absicherung und Reduktion der Transaktionskosten durch die Clearing-Stelle.

Swaps

sind unbedingte derivative Finanzinstrumente, bei denen sich die beiden Partner des Swap-Kontraktes zum Tausch zukünftiger Zahlungen verpflichten. Diese Zahlungen sind an die Entwicklung einer Referenzgröße gekoppelt
$\Rightarrow$ Zinsswaps, Währungsswaps, Equity Swaps, Commodity Swaps, Inflation Swaps, ...

Swaps sind nicht börsengehandelte Derivate und sind hinsichtlich ihrer Gestaltung äußerst flexibel.

Optionen

sind bedingte derivative Finanzinstrumente, deren Wert von der Wertentwicklung eines bestimmten Referenzwertes, dem sogenannten ***Basiswert (Underlying)*** abhängt.

Eine Option gewährt dem Käufer der Option das Recht, aber nicht die Pflicht,

- an einem bestimmten (***Europäische Option***) oder
- bis zu einem bestimmten (***Amerikanische Option***)

Zeitpunkt einen festgelegten Basiswert zum ***Basispreis*** (***Ausübungspreis, Strike Price***) zu

- kaufen (***Call-Option***) oder
- zu verkaufen (***Put-Option***).

Der Käufer einer Option besitzt eine ***Long-Position*** in der Option, der Verkäufer (Stillhalter, Writer) eine ***Short-Position.***

Der Verkäufer ist verpflichtet, den Basiswert zum vereinbarten Basispreis zu liefern (oder eine Ausgleichszahlung zu leisten).

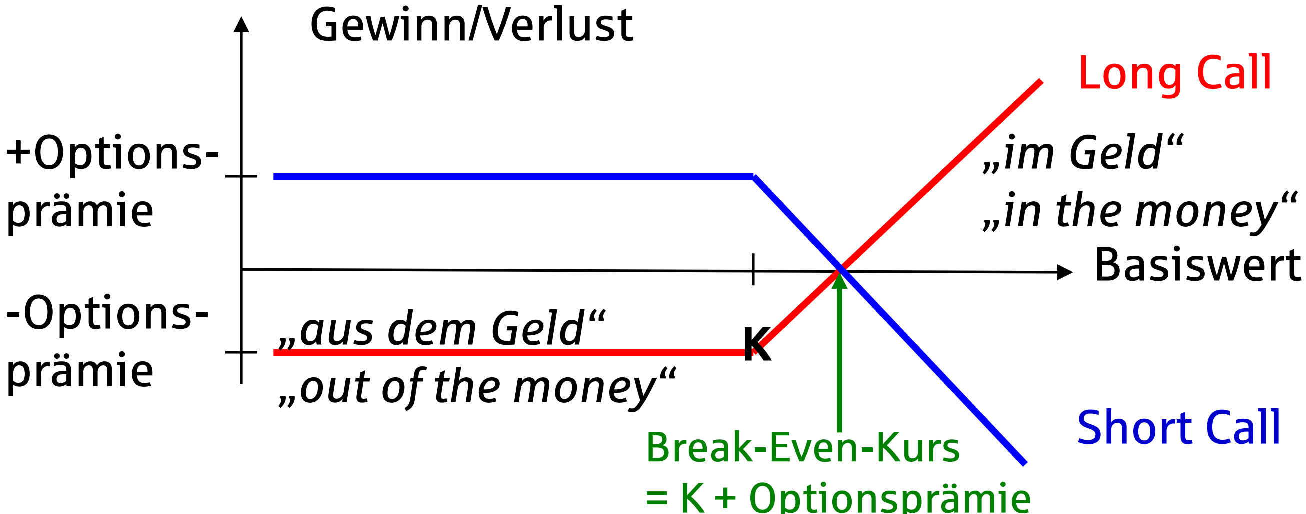
Call-Optionen auf einen beliebigen Basiswert

Ausübungswert eines Calls

$$C(U(T),K)=\max(U(T)-K;0)$$

wobei	***U(T)***	der Wert des Underlyings bei Ausübung der Option
	K	der Basispreis
	T	Zeitpunkt der Ausübung

<u>Gewinn- und Verlustprofil von Call-Optionen</u>



Innerer Wert einer europäischen Call-Option

$$\textit{Call-Preis } C = \textit{Innerer Wert} + \textit{Zeitwert}$$

mit

$$\textit{Innerer Wert } C_{IW} = \max\left(U(0) - K \cdot ZBAF(0,T); 0\right)$$

wobei	***U(0)***	der heutige Wert des Underlyings
	K	der Basispreis
	ZBAF(0,T)	risikoloser Zerobondabzinsungsfaktor
	C	Wert einer europäischen Call-Option
	T	Restlaufzeit des Calls

Preiskanal für europäische Call-Optionen

$$U(0) \geq C \geq C_{IW}$$

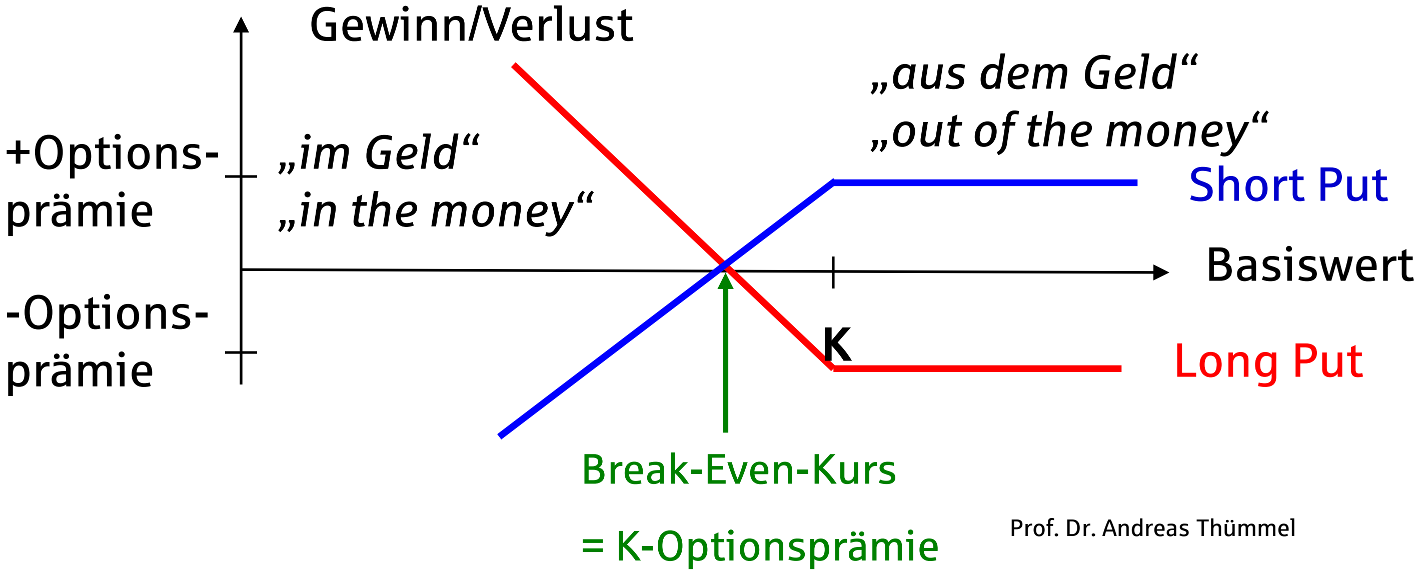
Put-Optionen auf einen beliebigen Basiswert

Ausübungswert eines Puts

$$P(U(T),K) = max(K-U(T);0)$$

wobei ***U(T)*** der Wert der Aktie bei Ausübung der Option
K der Basispreis
T Zeitpunkt der Ausübung

<u>Gewinn- und Verlustprofil von Put-Optionen</u>



Innerer Wert einer europäischen Put-Option

$$\textbf{\textit{Put-Preis P = Innerer Wert + Zeitwert}}$$

mit

$$\textit{Innerer Wert } P_{IW} = \max\left(K \cdot ZBAF(0,T) - U(0); 0\right)$$

wobei

U(0)	der heutige Wert des Underlyings
K	der Basispreis
ZBAF(0,T)	risikoloser Zerobondabzinsungsfaktor
P	Wert einer europäischen Put-Option
T	Restlaufzeit des Puts

Preiskanal für europäische Put-Optionen

$$ZBAF(0,T) \cdot K \geq P \geq P_{IW}$$

Amerikanische und europäische Optionen

Relation zwischen europäischen und amerikanischen Optionen

- Der Preis einer amerikanischen Call-Option liegt immer über dem einer europäischen Call-Option mit gleicher Laufzeit und gleichem Basispreis auf das selbe Underlying.

$$\mathbf{C_e \leq C_a}$$

- Der Preis einer amerikanischen Put-Option liegt immer über dem einer europäischen Put-Option mit gleicher Laufzeit und gleichem Basispreis auf das selbe Underlying.

$$\mathbf{P_e \leq P_a}$$

Optionssensitivitäten - Greeks

- Das Options-**Delta** Δ gibt die Sensitivität des Optionsgeschäftes bei Änderung des Basiswertes um eine Einheit an.
- Das Options-**Gamma** Γ zeigt wie stark sich das Delta in bei einer Änderung des Basiswertes um eine Einheit verändert.
- Das Options-**Theta** Θ macht eine Aussage darüber, wie sehr sich der Optionspreis verändert, wenn sich die Laufzeit der Option um einen Tag ändert.
- Das Options-**Vega** ist die Sensitivität, die die Veränderung des Optionspreises bei einer Änderung der Volatilität um einen Prozentpunkt abbildet.

Weitere Einflussfaktoren auf den Optionspreis:

- Zinssatz bzw. Diskontfaktor ZBAF(0,T)
- Basispreis

Einflussfaktoren auf den Optionspreis

- Volatilität / Moneyness aus Sicht des Käufers

Volatilität/Moneyness	aus dem Geld	im Geld
höhere Volatilität	sinkendes Verlustrisiko	steigendes Verlustrisiko
niedrigere Volatilität	steigendes Verlustrisiko	sinkendes Verlustrisiko

- Restlaufzeit
  Je geringer die Restlaufzeit, desto kleiner die Optionsprämie.

Warum ist das so???

Optionen in der Praxis

Deutsche Bank AG Call 19.06.13 Dt.Post 15,5

Kursdaten

Börsenplatz	Stuttgart	
Last	2,49G	0 Stk.
Kurszeit	05.03.2013	13:02:53 Uhr
Tagesvolumen (nominal)	100.000	
Tageshoch / -tief	2,49	1,92
Vortageskurs (04.03.) / Kursart	1,76	KS
Veränd. Vortag	+0,730	+41,48%
Jahreshoch / -tief	2,23 (29.01.)	1,42 (09.01.)
52 Wochenhoch / -tief	2,23 (29.01.)	0,42 (27.06.)

Hinweis: Restlaufzeit weniger als vier Monate.

Stammdaten

WKN	DE61JB
ISIN	DE000DE61JB2
Symbol	-
Wertpapierart	Hebelprodukt
Produktgattung	Optionsscheine - Classic
Produktname	Deutsche Post Optionsschein
Emittent	Deutsche Bank AG
Handelssegment	euwax
Optionsart	Call
Basiswert (-kurs)	Deutsche Post AG Namens-Aktien o.N. (17,875)
Basispreis in [Währung]	15,50 [EUR]
Cap in [Währung]	- []
Knock-in-Schwelle	-
Range	-
Bezugsverhältnis	1 : 1
Ausübungsart	Amerikanisch
Kleinste handelbare Einheit	1,00

Kennzahlen

Berechnungszeitpunkt	15:07:29 Uhr (05.03.13)
Delta	0,819
Hebel	7,175
Implizite Volatilität (Geldkurs)	36,12%
Omega	5,903
Theta	-0,002
Vega	0,021

Chart

Basiswert

Quelle: Börse Stuttgart

Weitere Optionskennzahlen

- Das ***Aufgeld***
  - einer Call-Option

    Aufgeld eines Calls = C - max(U(0)-K;0)
  - einer Put-Option

    Aufgeld eines Puts = P - max(K-U(0);0)

  gibt an, wie viel teurer der Kauf der Option und deren (fiktive) sofortige Ausübung im Vergleich zum direkten Kauf des Basiswertes ist.

Motive für den Einsatz derivativer Finanzinstrumente

- ***Hedging***

= Absicherung bzw. Verringerung des Preis- oder Bonitätsrisikos einer Position am Kassamarkt durch eine Position am Tertiärmarkt, dem Markt derivativer Finanzprodukte.

- ***Trading***

= Übernahme eines Risikos zur Ausnutzung erwarteter vorteilhafter Marktentwicklung.

- ***Arbitrage***

= Ausnutzung von Preisdifferenzen an verschiedenen Märkten

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit
3. Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen
4. Derivative Finanzinstrumente
5. *Forwards und Futures auf Anleihen*
6. Zinsswaps
7. Aktienoptionen
8. Anleihenoptionen
9. Zinsoptionen

Forwards

sind unbedingte Termingeschäfte, bei dem die verbindliche Lieferung einer bestimmten Anleihe zum ***Erfüllungszeitpunkt*** und zum im Voraus festgelegten ***Forward-Preis*** vereinbart wird.

Der faire, in der Zukunft bei Fälligkeit des Kontraktes gezahlte Forward-Preis lässt sich auf zwei Weisen berechnen:

- Cost of Carry-Ansatz
  $$\text{Fairer Terminpreis} = \text{Kassakurs} + \underbrace{\text{Finanzierungskosten} - \text{Finanzierungserträge}}_{\text{Cost of Carry}}$$
- Transformation der Zahlungsströme nach Fälligkeit auf den Erfüllungszeitpunkt

Berechnung des Forward-/Future-Preises

Beispiel:
ZSK der Nullkuponzinsen

Laufzeit	1	2	3	4
z(0,t)	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%
ZBAF(0,t)	0,9709	0,9246	0,8638	0,7921
z(t-1,1)	3,00%	5,01%	7,03%	9,06%

Berechnung des aktuellen, fairen Forward-Preises mit Erfüllungszeitpunkt in zwei Jahren auf eine Festzinsanleihe mit Laufzeit von vier Jahren, einem jährlichen Kupon von 4,5% und einem Nominal von 100.000€.

Berechnung des Forward-Preises durch Transformation

0	1	2	3	4
	4.500	4.500	4.500	104.500

3.887,27 $\xleftarrow{\cdot\, 1{,}05^{-3}=0{,}8638}$ 4.500

82.773,79 $\xleftarrow{\cdot\, 1{,}06^{-4}=0{,}7921}$ 104.500

Σ

86.661,06 $\xrightarrow{\cdot\, 1{,}04^{2}}$ 93.732,60

Der Forward-Preis F berechnet sich aus :

$F = (4.500 \cdot 1{,}05^{-3} + 104.500 \cdot 1{,}06^{-4}) \cdot 1{,}04^{2} = 93.732{,}60$ €

(Rundungsdifferenz!!!) **Aus Sicht des Forward-Käufers**

Berechnung des Forward-Preises mittels Cost of Carry

Der faire Preis der Anleihe lässt sich **aus Sicht des Forward-Verkäufers** mittels Diskontierung der Zahlungsströme (Barwertverfahren) berechnen als

$$\text{Kassapreis} = 4.500 \cdot 1{,}03^{-1} + 4.500 \cdot 1{,}04^{-2} + 4.500 \cdot 1{,}05^{-3} + 104.500 \cdot 1{,}06^{-4}$$
$$= 4.368{,}93 + 4.160{,}50 + 3.887{,}27 + 82.773{,}79$$
$$= 95.190{,}49\ €$$

$$\text{Finanzierungskosten} = 95.190{,}49 \cdot ((1+4\%)^2-1) = 7.767{,}54\ €$$

$$\text{Finanzierungserträge} = 4.500 \cdot (1+5{,}01\%) + 4.500 = 9.225{,}45\ €$$

$$\Rightarrow \text{Cost of Carry} = \text{Finanzierungskosten} – \text{Finanzierungserträge}$$
$$= 7.767{,}54 – 9.225{,}45 = -1.457{,}91$$

$$\Rightarrow \text{Forward-Preis} = \text{Kassapreis} + \text{Cost of Carry}$$
$$= 95.190{,}49 - 1.457{,}91 = 93.732{,}58$$

Berechnung des Forward-Preises mittels Cost of Carry

	0	1	2	~~3~~
Σ	0	0	Forward-Preis?	

Kauf der Anleihe zum Kassapreis

-95.190,49 4.500 4.500

Mittelaufnahme mittels einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit 2 Jahre

$+95.190{,}49 \xrightarrow{\cdot\ 1{,}04^2} -102.958{,}03$

=-95.190,49-7.767,54

Wiederanlage in t=1 bis t=2 des Kupons zum heutigen Forwardzins

$-4.500 \xrightarrow{\cdot\ 1{,}0501^1} 4.725{,}45$

Aus Sicht des Forward-Verkäufers Σ -93.732,58 $\Rightarrow$ Forward-Preis

= -95.190,49 Kassapreis
-7.767,54 Finanzierungskosten
+9225,45 Finanzierungserträge

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit
3. Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen
4. Derivative Finanzinstrumente
5. Forwards und Futures
6. *Zinsswaps*
7. Aktienoptionen
8. Anleihenoptionen
9. Zinsoptionen

Zinsswaps

sind symmetrische derivative Finanzinstrumente, bei denen zwei Vertragspartner Zinszahlungen, aber keine Nominale tauschen.

Kuponswaps (Plain Vanilla Swaps)

= Tausch eines Festzinssatzes gegen einen variablen Referenzzins (EURIBOR, LIBOR, Swap Rates).

Der Payer (Käufer) zahlt feste Zinsen und der Receiver (Verkäufer) zahlt die variablen Zinsen. Das Nominal, auf dessen Grundlage die Zinszahlungen berechnet werden, bleibt über die Laufzeit fest.

Die Höhe der variablen Zinsen wird zwei bis drei Tage vor den sog. ***Roll Over Dates*** (Zinszahlungsterminen) festgelegt.

Es kann ein Zinsaufschlag (***Spread***) vereinbart werden.

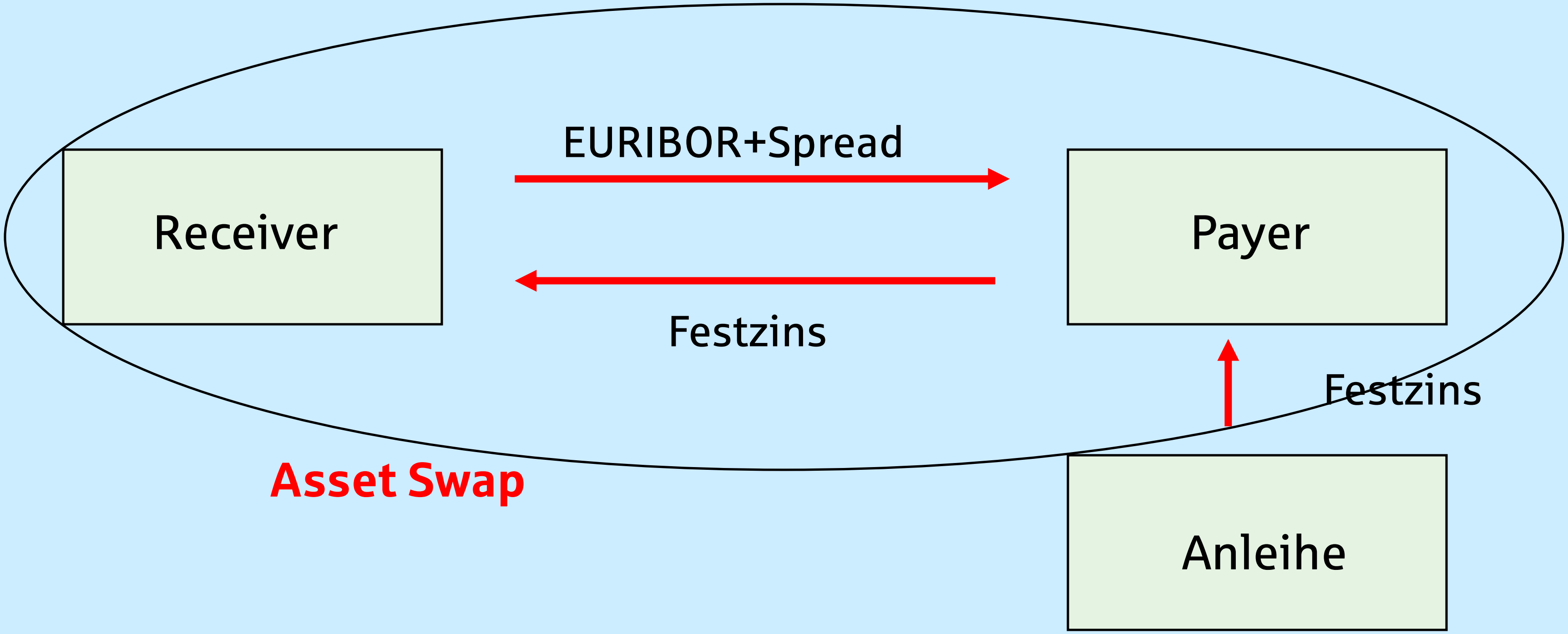
Übliche Zinsrechnungskonventionen:

- Variable Zinszahlungen mit act/360
- Festzinsseite mit act/act

Zinsswaps

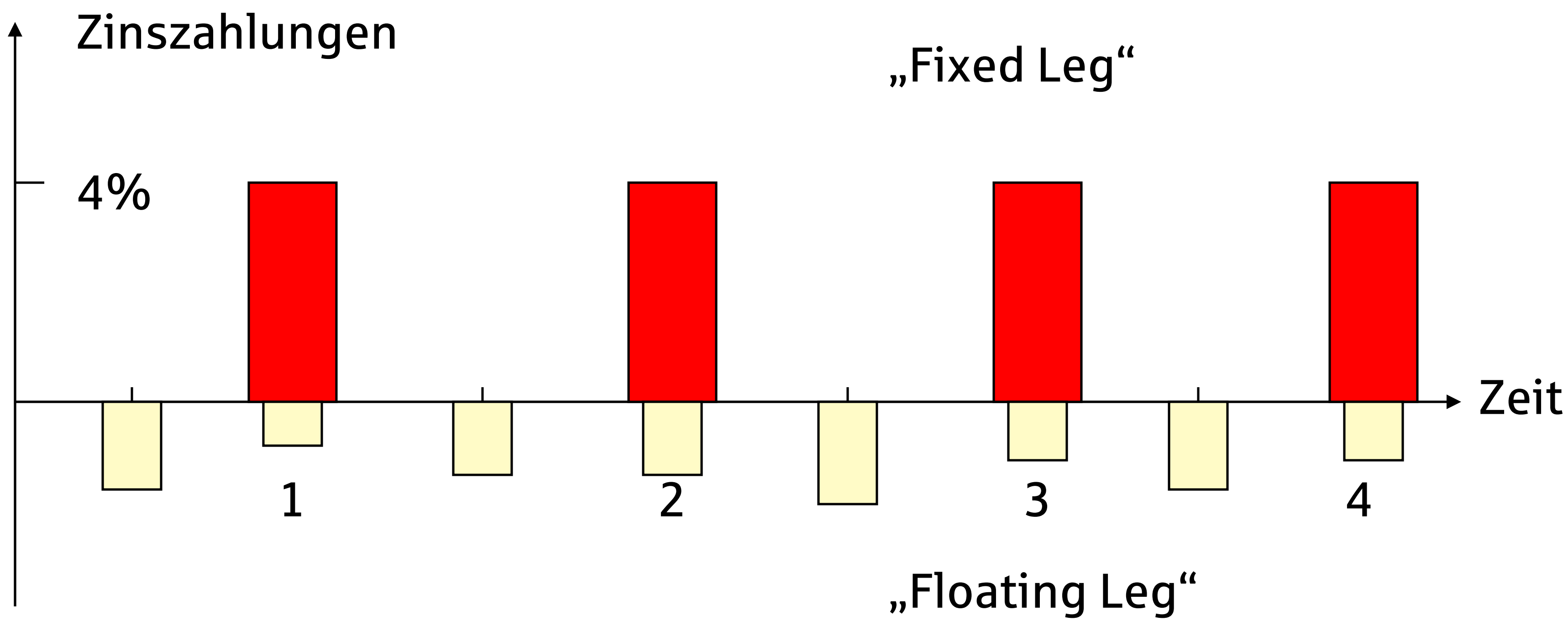
Beispiel für einen Bestands-Hedge:

Payer Swap zur Absicherung gegen steigende Zinsen



Zinsswaps

Cash-Flow eines Plain-Vanilla-Swaps aus Sicht des Receivers



Ex ante sind die variablen Zinszahlungen nicht bekannt!

Bewertung von Zinsswaps

Bewertung von Zinsswaps
mittels Duplikation der Zahlungsströme eines Plain-Vanilla-Swaps durch eine Festzinsanleihe und eine Floating Rate Note.

Wert eines Payer-Swaps
= Wert der Floating Rate Note – Wert der Festzinsanleihe

Wert eines Receiver-Swaps
= Wert der Festzinsanleihe - Wert der Floating Rate Note

$\Rightarrow$ ***Fairer Wert bei Abschluss des Swaps = 0***

Vorsicht!

- Swaps beinhalten eine eigene Swapzinsstruktur, die zur Bewertung des Swaps herangezogen werden kann!
- Bewertung am Roll Over Date vereinfacht (Spread = 0):
  Wert eines Payer-Swaps = 100% des Nominals – Festzinsanleihe

Swapsatzkurven in der Praxis

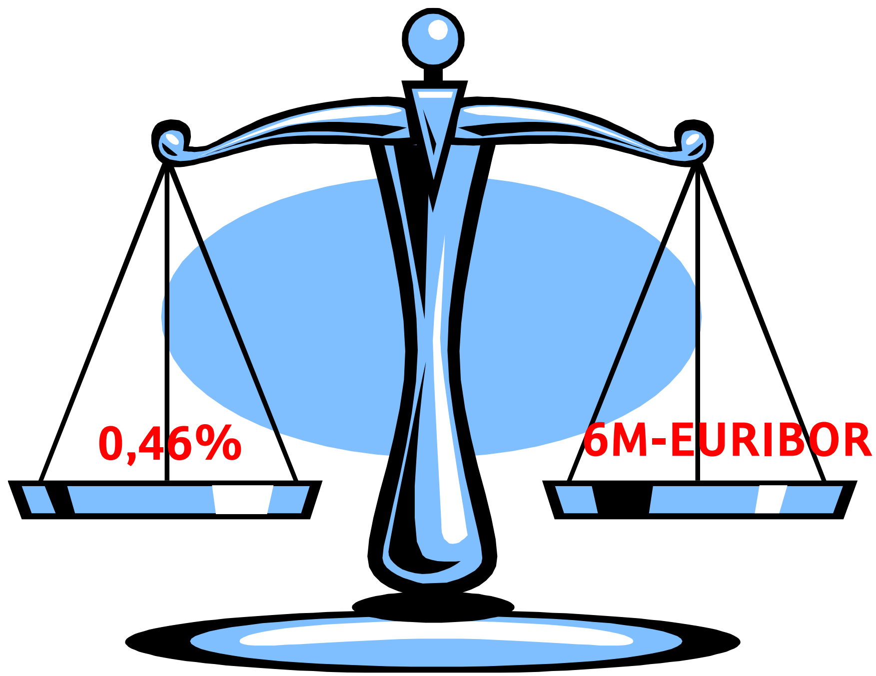
TOPIRS

IRS - Majors

	USD IRS			EUR IRS		
	AM-A360/3M LIBOR			AB30/360-6MEURIB		
1Y	0.2900	0.3500	15:16	0.3360	0.3860	15:19
2Y	0.3750	0.3890	15:18	0.4500	0.4700	15:19
3Y	0.4910	0.5030	15:19	0.5890	0.5950	15:19
4Y	0.6700	0.6900	15:19	0.7510	0.7570	15:19
5Y	0.9080	0.9200	15:18	0.9270	0.9470	15:19
6Y	1.1570	1.1690	15:18	1.1170	1.1370	15:19
7Y	1.3760	1.4160	15:18	1.2960	1.3160	15:19
8Y	1.5970	1.6090	15:19	1.4600	1.4800	15:19
9Y	1.7810	1.7930	15:18	1.6130	1.6230	15:19
10Y	1.9450	1.9570	15:17	1.7350	1.7650	15:19

Quelle: Thomson Reuters Eikon

EUR-2Y



Zinsswaps

Beispiel:
ZSK der Swapsätze

Laufzeit	1	2	3
SR(0,t)	3,00%	4,00%	5,00%

Bewertung eines bestehenden Kuponswaps mit Restlaufzeit von drei Jahren, einem jährlichen Festzins von 4,5%, einem jährlichen variablen Zins (1-jähriger Swapsatz) mit Spread von 20 BP und einem Nominal von 1.000.000€ in einem Zinsanpassungstermin.
Die ZSK der Nullkuponswapzinsen z(0,t) und der Forward-Zinsen berechnet sich als

Laufzeit	1	2	3
z(0,t)	3,00%	4,03%	5,07%
FR(t-1,1)	3,00%	5,07%	7,18%

Zinsswaps

Duplikation des Zahlungsstroms:

Wert der Festzinsanleihe mit Kupon 4,5%

$= 45.000 \cdot 1{,}03^{-1} + 45.000 \cdot 1{,}0403^{-2} + 1.045.000 \cdot 1{,}0507^{-3}$

$= 43.689{,}32 + 41.581{,}04 + 900.907{,}27 = 986.177{,}63$ €

Wert des Floaters mit variablen Zins + 20bp

$= 32.000 \cdot 1{,}03^{-1} + 52.700 \cdot 1{,}0403^{-2} + 1.073.800 \cdot 1{,}0507^{-3}$

$= 31.067{,}96 + 48.696{,}01 + 925.736{,}11 = 1.005.500{,}08$ €

$\Rightarrow$ Wert des Swaps aus Sicht des Payers

$= 1.005.500{,}08 - 986.177{,}63 = 19.322{,}45$ €

aus Sicht des Payers ist der Swap „im Geld“ und damit vorteilhaft für den Payer (Festzins im Vergleich zu den Marktkonditionen zu gering bzw. der Spread auf den variablen Zins zu hoch.)

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit
3. Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen
4. Derivative Finanzinstrumente
5. Forwards und Futures
6. Zinsswaps
7. *Aktienoptionen*
8. Anleihenoptionen
9. Zinsoptionen

Aktienoptionen

sind bedingte derivative Finanzinstrumente, deren Wert vom Kursverlauf einer Aktie abhängt, die als Underlying eine Aktie aufweisen.

$\Rightarrow$ Asymmetrische Abhängigkeit vom zukünftigen, heute nicht bekannten Verlauf des Aktienkurses

- Verteilungsfreie/modellunabhängige Analyse
- Nicht deterministische Entwicklung der Aktie erfordert den Einsatz von stochastischen Methoden ($\rightarrow$ Binomialmodell, $\rightarrow$ Black-Scholes-Modell)

Aktienoptionen dienen unter anderem der Absicherung gegen steigende/fallende Aktienkurse.

Verteilungsfreie/Modellunabhängige Analyse

Ausübungswerte eines Calls und eines Puts auf Aktien

- ***Ausübungswert eines Calls***

$$C(S(T),K) = \max(S(T)-K;0)$$

- ***Ausübungswert eines Puts***

$$P(S(T),K) = \max(K-S(T);0)$$

wobei ***S(T)*** unbekannter Kurs der Aktie bei Ausübung
K der Basispreis
T die Laufzeit der Option

Verteilungsfreie/Modellunabhängige Analyse

Innerer Wert einer europäischen Call- und einer Put-Option

$$\textit{Call-Preis } C = \textit{Innerer Wert} + \textit{Zeitwert}$$

mit

$$\textit{Innerer Wert } C_{IW} = \max\left(S(0) - K \cdot ZBAF(0,T); 0\right)$$

$$\textit{Put-Preis } P = \textit{Innerer Wert} + \textit{Zeitwert}$$

mit

$$\textit{Innerer Wert } P_{IW} = \max\left(K \cdot ZBAF(0,T) - S(0); 0\right)$$

wobei	***S(0)***	heutiger Aktienkurs
	K	der Basispreis
	ZBAF(0,T)	Zerobondabzinsungsfaktor
	C	Wert einer europäischen Call-Option
	P	Wert einer europäischen Put-Option
	T	Restlaufzeit des Calls bzw. des Puts

Einleitung in die Bewertung von Optionen

Bewertung von Optionen in der Finanzmathematik

1. Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des zugrundeliegenden Finanzinstruments ('Underlyings') mittels eines stochastischen Prozesses (z.B. Binomialbaum, Logarithmische Normalverteilung) etc.), der ***ökonomisch sinnvoll*** und ***realitätsnah*** ist.

2. Berechnung des Preises des Derivats/der Option mittels stochastischer Methoden.
   Definition und Berechnung eines "fairen Preises" einer Option?
   $\Rightarrow$ **Risikoneutralität** $S(0)=ZBAF(0,T)\cdot E[S(T)]$
   Der Preis heute entspricht der diskontierten Erwartung an den zukünftigen Preis.

Bewertung europäischer Optionen im Binomialbaum von Cox, Ross und Rubinstein

<u>Zugrundeliegende Annahmen des Binomialmodells</u>

- Vollkommener Kapitalmarkt
  - Keine Transaktionskosten, keine Steuern
  - Keine Verschuldungs- und Anlagebeschränkung
  - No-Arbitrage
  - Beliebige Teilbarkeit der Anlagen
  - Alle Marktteilnehmer verfügen über die gleiche Information.
- Keine Dividendenzahlungen aus der Aktie während der Optionsfrist
- Zeitunabhängiger risikoloser Zinssatz (flache Zinsstruktur)
- Die Investoren sind risikoneutral.
- Alle Marktteilnehmer haben homogene Erwartungen bezüglich der zukünftigen Aktienkursentwicklung.
- *Diskreter Aktienhandel*
- *Die Aktienkursentwicklung kann durch eine Binomialverteilung beschrieben werden.*

Bewertung von Aktienoptionen im einstufigen Binomialmodell

Annahme:
Eine Aktie, deren Preis nach der Anlageperiode (=Optionsfrist) einen von genau zwei bekannten, möglichen Zuständen (u = „up“, d = „down) annimmt.
Mit der No-Arbitrage-Bedingung muss im Zusammenhang mit der flachen, exponentielle Zinsstruktur gelten

$$u > (1+z)^T - 1 > d$$

Beide Zustände werden jeweils mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen.

p=?

$S_u(T)=S(0)\cdot(1+u)$

S(0)

1-p=?

$S_d(T)=S(0)\cdot(1+d)$

Ist die Verteilung risikoneutral? Wie wird p gewählt?
$ZBAF(0,T)\cdot E[S(T)] = ZBAF(0,T)\cdot(p\cdot S_u(T)+(1-p)\cdot S_d(T))=S(0)$???

Bewertung von Aktienoptionen im einstufigen Binomialmodell

Die Verteilung ist risikoneutral, wenn wir p in Abhängigkeit von u und d so wählen, dass

$$p = \frac{(1+z)^T - (1+d)}{u-d}$$

Damit sind die Wahrscheinlichkeiten festgelegt und durch u und d bestimmt! Alle Marktteilnehmer haben die gleiche Vorstellung bzgl. der Entwicklung der Aktienkurse.

Ad-Hoc-Bewertung der Optionen

Bildung des diskontierten Erwartungswertes der zukünftigen Ausübungswerte

- Call-Option $C = ZBAF(0,T) \cdot (p \cdot C_u(T) + (1-p) \cdot C_d(T))$
  $= ZBAF(0,T) \cdot (p \cdot \max(S_u(T)-K;0) + (1-p) \cdot \max(S_d(T)-K;0)$
- Put-Option $P = ZBAF(0,T) \cdot (p \cdot P_u(T) + (1-p) \cdot P_d(T))$
  $= ZBAF(0,T) \cdot (p \cdot \max(K-S_u(T);0) + (1-p) \cdot \max(K-S_d(T);0)$

Bewertung von Aktienoptionen im einstufigen Binomialmodell

Beispiel:
Bewertung einer Put-Option auf die Bayer AG Aktie mit Basispreis 65,00 und einer Laufzeit von zwei Jahren im einstufigen Binomialmodell. Der heutige Aktienkurs liegt bei 62,50, die Aufwärtsrendite über die nächsten beiden Jahre liegt bei 10%, die Abwärtsrendite -6,50% und der exponentielle Zins wird mit 4% angenommen.

$\Rightarrow$ K = 65,00, S(0) = 62,50, T=2, u=10%, d=-6,50%, z=4%

1. Überprüfung der No-Arbitrage-Bedingung
   u = 10% > $1{,}04^2$-1=8,16% >-6,50% erfüllt!
2. Berechnung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit
   p=[$1{,}04^2$-(1-0,065)]/(0,10-(-0,065))=0,8885
   und 1-p = 1-0,8885 = 0,1115

Bewertung von Aktienoptionen im einstufigen Binomialmodell

3. Aufbau des Binomialbaums

t=0 t=2

$S_u(2) = S(0) \cdot (1+u) = 62{,}50 \cdot 1{,}10 = 68{,}75$

$P_u(2) = \max(65{,}00 - 68{,}75; 0) = 0$

0,8885

S(0)

0,1115

$S_d(2) = S(0) \cdot (1+d) = 62{,}50 \cdot 0{,}935 = 58{,}44$

$P_d(2) = \max(65{,}00 - 58{,}44; 0) = 6{,}56$

4. Berechnung des Put-Preises

$$P = ZBAF(0,T) \cdot (p \cdot P_u(T) + (1-p) \cdot P_d(T))$$

$$= 1{,}04^{-2} \cdot (0{,}8885 \cdot 0 + 0{,}1115 \cdot 6{,}56) = 0{,}6763$$

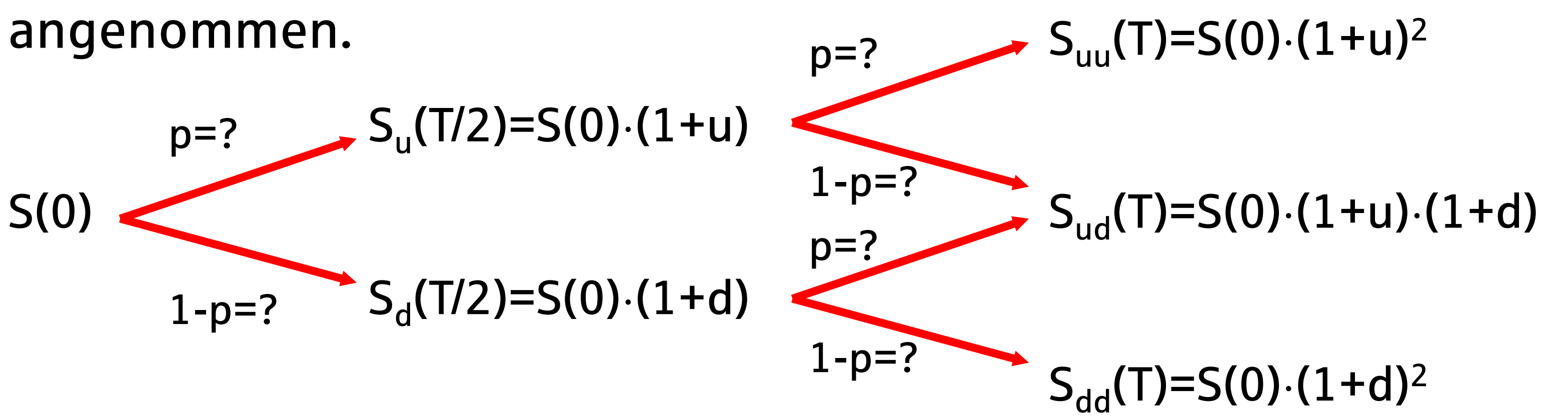
Der faire Preis für den Put beträgt 68 Cents.

Bewertung von Aktienoptionen im zweistufigen Binomialmodell

Annahme:
Eine Aktie, deren Preis nach der Hälfte der Anlageperiode (=Optionsfrist) einen von genau zwei bekannten, möglichen Zuständen (u = „up“, d = „down) annimmt.
Mit der No-Arbitrage-Bedingung muss im Zusammenhang mit der flachen, exponentiellen Zinsstruktur gelten

$$u > (1+z)^{T/2} - 1 > d$$

Beide Zustände werden jeweils mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen.



Bewertung von Aktienoptionen im zweistufigen Binomialmodell

Ist die Verteilung risikoneutral? Wie wird p gewählt?
$ZBAF(0,T)\cdot E[S(T)] = ZBAF(0,T)\cdot(p^2\cdot S_{uu}(T)+2\cdot p\cdot(1-p)\cdot S_{ud}(T)+(1-p)^2\cdot S_{dd}(T))=S(0)$?
Die Verteilung ist risikoneutral, wenn wir p in Abhängigkeit von u und d so wählen, dass

$$p = \frac{(1+z)^{T/2} - (1+d)}{u-d}$$

Damit sind wieder die Wahrscheinlichkeiten festgelegt und durch u und d bestimmt! Alle Marktteilnehmer haben die gleiche Vorstellung bzgl. der Entwicklung der Aktienkurse.

Ad-Hoc-Bewertung der Optionen

- Call-Option $C = ZBAF(0,T)\cdot(p^2\cdot C_{uu}(T)+2\cdot p\cdot(1-p)\cdot C_{ud}(T)+(1-p)^2\cdot C_{dd}(T))$
- Put-Option $P = ZBAF(0,T)\cdot(p^2\cdot P_{uu}(T)+2\cdot p\cdot(1-p)\cdot P_{ud}(T)+(1-p)^2\cdot P_{dd}(T))$

Bewertung von Aktienoptionen im zweistufigen Binomialmodell

Beispiel:

Bewertung einer Put-Option auf die Bayer AG Aktie mit Basispreis 65,00 und einer Laufzeit von zwei Jahren im zweistufigen Binomialmodell. Der heutige Aktienkurs liegt bei 62,50, die Aufwärtsrendite über das nächste Jahr liegt bei 5,50%, die Abwärtsrendite –3,50% und der exponentielle Zins wird mit 4% angenommen.

$\Rightarrow$ K = 65,00, S(0) = 62,50, T=2, u=5,50%, d=-3,50%, z=4%

1. Überprüfung der No-Arbitrage-Bedingung
   $u = 5{,}50\% > 1{,}04^1 - 1 = 4\% > -3{,}50\%$ erfüllt!
2. Berechnung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit
   $p=[1{,}04-(1-0{,}035)]/(0{,}055-(-0{,}035))=0{,}8333$
   und $1-p = 1-0{,}8333 = 0{,}1667$

Bewertung von Aktienoptionen im zweistufigen Binomialmodell

3. Aufbau des Binomialbaums

t=0

S(0)
=62,50

0,8333

0,1667

t=1

$S_u(1)$
$= 62{,}50 \cdot 1{,}055$
$= 65{,}94$

0,8333

0,1667

$S_d(1)$
$= 62{,}50 \cdot 0{,}965$
$= 60{,}31$

0,8333

0,1667

t=2

$S_{uu}(2)=62{,}50 \cdot 1{,}055^2=69{,}56$
$P_{uu}(2)=\max(65-69{,}56;0)=0$

$S_{ud}(2)=62{,}50 \cdot 1{,}055 \cdot 0{,}965=63{,}63$
$P_{ud}(2)=\max(65-63{,}63;0)=1{,}37$

$S_{dd}(2)= 62{,}50 \cdot 0{,}965^2 =58{,}20$
$P_{dd}(2)=\max(65-58{,}20;0)=6{,}80$

Bewertung von Aktienoptionen im zweistufigen Binomialmodell

4. Berechnung des Put-Preises

$$P = ZBAF(0,T)\cdot(p^2\cdot P_{uu}(T)+2\cdot p\cdot(1-p)\cdot P_{ud}(T)+(1-p)^2\cdot P_{dd}(T))$$

$$= 1{,}04^{-2}\cdot(0{,}8333^2\cdot 0 + 2\cdot 0{,}8333\cdot 0{,}1667\cdot 1{,}37+0{,}1667^2\cdot 6{,}80)$$

$$= 0{,}5266$$

Der faire Preis für den Put beträgt 53 Cents.

Bewertung europäischer Optionen nach Black-Scholes

Zugrundeliegende Annahmen des Black-Scholes Modells

- Vollkommener Kapitalmarkt
  - Keine Transaktionskosten, keine Steuern
  - Keine Verschuldungs- und Anlagebeschränkung
  - No-Arbitrage
  - Beliebige Teilbarkeit der Anlagen
  - Alle Marktteilnehmer verfügen über die gleiche Information.
- Keine Dividendenzahlungen aus der Aktie während der Optionsfrist
- Zeitunabhängiger risikoloser Zinssatz (flache Zinsstruktur)
- Die Investoren sind risikoneutral.
- Alle Marktteilnehmer haben homogene Erwartungen bezüglich der zukünftigen Aktienkursentwicklung.
- *Stetiger Aktienhandel*
- *Die logarithmischen Aktienrenditen sind normalverteilt bzw. die Aktienkurse sind logarithmisch normalverteilt (Random Walk).*
- *Die Volatilität der Aktienkursentwicklung ist konstant.*

Mathematischer Hintergrund des Black-Scholes-Modells

Annahme:
Die Entwicklung des Aktienkurses kann durch die gegebene Verzinsung und durch eine zusätzliche Zufallskomponente anhand einer stochastischen Differentialgleichung erklärt werden.

$$\underbrace{dS(t)}_{\text{Aktienkursveränderung}} = \underbrace{rS(t)dt}_{\text{Verzinsung}} + \underbrace{\sigma S(t)dW(t)}_{\text{Zufallskomponente}}$$

Hierbei ist σ das Maß für die Schwankung der Aktienkurse, die sogenannte ***Volatilität***!

Die Lösung dieser Gleichung ist die geometrische Brownsche Bewegung

$$S(T) = S(0) \cdot e^{rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W(T)}$$

$\Rightarrow$ Notwendigkeit stetiger Zinssätze!

Bewertung europäischer Optionen nach Black-Scholes

Damit berechnet sich der Preis einer europäischen Call-Option auf eine Aktie als

$$C = S(0) \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

wobei ***S(0)*** der heutige Kurs der Aktie
K der Basispreis der Option
r der risikolose stetige Zinssatz
σ die Volatilität der Aktie
T die Restlaufzeit der Option
e^{-rT}***=ZBAF(0,T)*** risikoloser stetiger Zerobondabzinsungsfaktor

Put-Call-Parität für Aktienoptionen

Für <u>europäische</u> Optionen gilt unter der Annahme eines arbitragefreien Marktes folgender Zusammenhang zwischen Call- und Put-Optionen

$$C = P + S(0) - K \cdot ZBAF(0,T).$$

Für den Preis einer Put-Option mit Basispreis X, Laufzeit T, Volatilität σ und einem risikolosen stetigem Zins r gilt im Black-Scholes-Modell

$$P = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S(0) \cdot N(-d_1)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Optionsbewertung nach Black-Scholes

Beispiel:
Bewertung (Black-Scholes) einer europäischen Call- sowie der zugehörigen Put-Option auf die BASF-Aktie mit Basispreis 50, einer Restlaufzeit von einem halben Jahr und einem risikolosen, stetigen Zinssatz von 2% p.a. Der Aktienkurs der BASF AG beträgt derzeit 54€, die Volatilität der Aktie liegt bei 27,50%.

$\Rightarrow$ $K = 50$, $S(0) = 54$, $\sigma=27{,}50\%$, $r=2\%$, $T=0{,}5$

$\Rightarrow$ $d_1 = (\ln(54/50)+(0{,}02 + 0{,}5 \cdot 0{,}275^2) \cdot 0{,}5) / (0{,}275 \cdot 0{,}5^{0{,}5})$
$= 0{,}54$

$d_2 = d_1 - 0{,}275 \cdot 0{,}5^{0{,}5} = 0{,}35$

$N(d_1) = 0{,}7054$ und $N(d_2) = 0{,}6368$

$\Rightarrow$ Preis des Calls $C = 54 \cdot 0{,}7054 - 50 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 0{,}5} \cdot 0{,}6368 = 6{,}5684$

$\Rightarrow$ Preis des Puts $P = 6{,}5684 - 54 + 50 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 0{,}5} = 2{,}0709$

Modellunabhängige Analyse von Aktienoptionen

Die Modellunabhängige Analyse kann ohne ein zugrundeliegendes mathematisches Modell erfolgen – für die Ermittlung des Zeitwertes braucht man jedoch eine Aussage über den Optionspreis!

Angabe der Preiskanäle

Innerer Wert der Call-Option $C_{IW}=\max(54 - 50 \cdot e^{-0,02 \cdot 0,5};0) = 4,4975$

Innerer Wert der Put-Option $P_{IW}=\max(50 \cdot e^{-0,02 \cdot 0,5} - 54;0) = 0$

$\Rightarrow$ Preiskanal des Calls: $54 \geq C \geq 4,4975$

$\Rightarrow$ Preiskanal des Puts: $50\, e^{-0,02 \cdot 0,5} = 49,5025 \geq P \geq 0$

Berechnung des Zeitwertes der Optionen

Zeitwert des Calls = 6,5684 - 4,4975 = 2,0709

Zeitwert des Puts = 2,0709 – 0 = 2,0709

Modellunabhängige Analyse von Aktienoptionen

Break-Even-Kurs der Call-Option = K+C=50+6,5684=56,5684
Break-Even-Kurs der Put-Option = K-P=50-2,0709=47,9291

Aufgeld des Calls = C-max(S(0)-K;0)=6,5684-max(54-50;0)=2,5684
$\Rightarrow$ Prozentuales Aufgeld =2,5684 / 54 = 0,0476 = 4,76%
Aufgeld des Puts = P-max(K-S(0);0)=2,0709-max(50-54;0)=2,0709
$\Rightarrow$ Prozentuales Aufgeld =2,0709 / 54 = 0,0384 = 3,84%

Ermittlung der Input-Faktoren

- Volatilität
  - Historische Volatilität der Aktienreturns über eine bestimmte Periode
  - Implizite Volatilität in den aktuellen Optionspreisen (Smile-Effekt)
- Aktienkurs zur Bewertung
  $\Rightarrow$ S_{mid} Mittel aus Ask und Bid-Preis
- Optionsfrist nach Geldmarktkonvention act/360
- Zinssatz r
  Verwendung des zu T gehörenden Zinssatzes der ZSK
  $\Rightarrow$ Umrechnung der i.d.R. exponentiellen Geldmarktzinsen in einen stetigen Zinssatz
- Basispreis und Fälligkeit der Option sind Vertragsbestandteile

Zusammenhang zwischen beiden Modellen

Liegt die Volatilität der Aktienkurse vor, so kann man einen Zusammenhang zwischen den Aktienkursrenditen im n-stufigen Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein und dem Black-Scholes Modell herstellen:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} - 1 \quad \text{und} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} - 1$$

Je kleiner man die Handelsintervalle im Binomialmodell macht (d.h. je größer das n wird), desto mehr nähert sich der Preis des Binomialmodells dem Black-Scholes-Preis!!!

Zusammenhang der beiden Modelle

Beispiel:
Bewertung (2-stufiges Binomialmodell) einer europäischen Call- sowie der zugehörigen Put-Option auf die BASF-Aktie mit Basispreis 50, einer Restlaufzeit von einem halben Jahr und einem risikolosen, stetigen Zinssatz von 2% p.a. Der Aktienkurs der BASF AG beträgt derzeit 54€, die Volatilität der Aktie liegt bei 27,50%.

Die No-Arbitrage-Bedingung muss bei diesem Zusammenhang nicht überprüft werden!

$\Rightarrow$ K = 50, S(0) = 54, σ=27,50%, r=2%, T=0,5 und damit

$$z = e^r - 1 = 0{,}0202 = 2{,}02\%$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} - 1 = e^{0{,}2750\cdot\sqrt{0{,}5/2}} - 1 = 0{,}1474 = 14{,}74\%$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} - 1 = e^{-0{,}2750\cdot\sqrt{0{,}5/2}} - 1 = -0{,}1285 = -12{,}85\%$$

$$p = \frac{(1+z)^{T/n} - (1+d)}{u-d} = \frac{1{,}0202^{0{,}5/2} - (1-0{,}1285)}{0{,}1474 - (-0{,}1285)} = 0{,}4839$$

Zusammenhang der beiden Modelle

Aufbau des Binomialbaums

t=0		t=0,25		t=0,5
				$S_{uu}(0,5)=54\cdot 1,1474^2=71,09$ $C_{uu}(0,5)=\max(71,09-50;0)=21,09$ $P_{uu}(0,5)=\max(50-71,09;0)=0$
		$S_u(0,25)$ $= 54\cdot 1,1474$ $= 61,96$	0,4839 ↗ ↘ 0,5161	
$S(0)$ $=54$	0,4839 ↗ ↘ 0,5161			$S_{ud}(0,5)=54\cdot 1,1474\cdot 0,8715=54$ $C_{ud}(0,5)=\max(54-50;0)=4$ $P_{ud}(0,5)=\max(50-54;0)=0$
		$S_d(0,25)$ $= 54\cdot 0,8715$ $= 47,06$	0,4839 ↗ ↘ 0,5161	
				$S_{dd}(0,5)= 54\cdot 0,8715^2=41,01$ $C_{dd}(0,5)=\max(41,01-50;0)=0$ $P_{dd}(0,5)=\max(50-41,01;0)=8,99$

Zusammenhang der beiden Modelle

Berechnung des Call-Preises

$C = ZBAF(0,T)\cdot(p^2\cdot C_{uu}(T)+2\cdot p\cdot(1-p)\cdot C_{ud}(T)+(1-p)^2\cdot C_{dd}(T))$
$= 1{,}0202^{-0{,}5}\cdot(0{,}4839^2\cdot 21{,}09 + 2\cdot 0{,}4839\cdot 0{,}5161\cdot 4+0{,}5161^2\cdot 0)$
$= 6{,}8668$

Der faire Preis für den Call beträgt 6,87 Euro.

Berechnung des Put-Preises mit dem Binomialbaum

$P = ZBAF(0,T)\cdot(p^2\cdot P_{uu}(T)+2\cdot p\cdot(1-p)\cdot P_{ud}(T)+(1-p)^2\cdot P_{dd}(T))$
$= 1{,}0202^{-0{,}5}\cdot(0{,}4839^2\cdot 0 + 2\cdot 0{,}4839\cdot 0{,}5161\cdot 0+0{,}5161^2\cdot 8{,}99)$
$= 2{,}3698$

Der faire Preis für den Put beträgt 2,37 Euro.

Alternative Berechnung des Put-Preises – oder Test – mit der Put-Call-Parität

$P = C – S(0) + K\cdot ZBAF(0,T) = 6{,}8668 – 54 + 50\cdot 1{,}0202^{-0{,}5} = 2{,}3693 = 2{,}37$

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit
3. Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen
4. Derivative Finanzinstrumente
5. Forwards und Futures
6. Zinsswaps
7. Aktienoptionen
8. *Anleihenoptionen*
9. Zinsoptionen

Anleiheoptionen

sind Optionskontrakte, deren Wert vom Kursverlauf einer Anleihe abhängt, die also als Underlying eine Anleihe haben.

$\Rightarrow$ Abhängigkeit von der gesamten Zinsstrukturkurve und deren zukünftiger Entwicklung

$\Rightarrow$ Annahme des konstanten risikolosen Zinssatzes entfällt im Vergleich zum Black-Scholes-Modell

- Verteilungsfreie/modellunabhängige Analyse
- Nicht deterministische Entwicklung der Anleihe erfordert den Einsatz von stochastischen Methoden ($\rightarrow$ Binomialmodell, $\rightarrow$ Black-Modell)

Die Optionsprämie kann auch in BP auf das Nominal-/Kontraktvolumen quotieren.

Anleiheoptionen dienen damit unter anderem der Absicherung gegen steigende/fallende Zinsen.

Verteilungsfreie/Modellunabhängige Analyse

Ausübungswerte eines Calls und eines Puts auf Anleihen

- ***Ausübungswert eines Calls***

$$C(A_T,K)= max(A_T-K;0)$$

- ***Ausübungswert eines Puts***

$$P(A_T,K)= max(K-A_T;0)$$

wobei A_T unbekannter Kurs der Anleihe bei Ausübung
K der Basispreis
T die Laufzeit der Option

Verteilungsfreie/Modellunabhängige Analyse

Innerer Wert einer europäischen Call- und einer Put-Option

$$\textbf{\textit{Call-Preis C = Innerer Wert + Zeitwert}}$$

mit

$$\textit{Innerer Wert } C_{IW} = \max\left((F - K) \cdot ZBAF(0,T); 0\right)$$

$$\textbf{\textit{Put-Preis P = Innerer Wert + Zeitwert}}$$

mit

$$\textit{Innerer Wert } P_{IW} = \max\left((K - F) \cdot ZBAF(0,T); 0\right)$$

wobei	F	der Forward-Kurs/Preis der Anleihe zum Zeitpunkt T
	K	der Basispreis/-kurs
	$ZBAF(0,T)$	exponentieller Zerobondabzinsungsfaktor
	C	Wert einer europäischen Call-Option
	P	Wert einer europäischen Put-Option
	T	Restlaufzeit des Calls bzw. des Puts

Bewertung europäischer Optionen nach Black

Zugrundeliegende Annahmen des Black-Modells

- Vollkommener Kapitalmarkt
  - Keine Transaktionskosten, keine Steuern
  - Keine Verschuldungs- und Anlagebeschränkung
  - No-Arbitrage
  - Beliebige Teilbarkeit der Anlagen
  - Alle Marktteilnehmer verfügen über die gleiche Information.
- Die Investoren sind risikoneutral.
- Alle Marktteilnehmer haben homogene Erwartungen bezüglich der zukünftigen Kursentwicklung.
- *Stetiger Handel*
- *Die Kurse der Anleihen sind logarithmisch normalverteilt (Random Walk).*
- *Die Volatilität der Anleiheentwicklung ist konstant.*

Bewertung europäischer Optionen nach Black

Damit berechnet sich der **Preis einer europäischen Call-Option** auf eine Anleihe als

$$C = ZBAF(0,T) \cdot (F \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2))$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

wobei F der heutige Forward-Kurs der Anleihe
K der Basispreis der Option
σ die Volatilität der Forward-Kurse
T die Restlaufzeit der Option

Hierbei erfolgt die Angabe des Optionspreises in %, da sich die Formel auf den Kurs bezieht!

Put-Call-Parität für Anleiheoptionen

Für europäische Optionen gilt unter der Annahme eines arbitragefreien Marktes folgender Zusammenhang zwischen Call- und Put-Optionen

$$P = C + (K - F) \cdot ZBAF(0, T).$$

Für den **Preis einer europäischen Put-Option** mit Basispreis X, Laufzeit T, Volatilität σ gilt dann im Black-Modell

$$P = ZBAF(0, T) \cdot (K \cdot N(-d_2) - F \cdot N(-d_1))$$

Hierbei erfolgt die Angabe des Optionspreises in %, da sich die Formel auf den Kurs bezieht!

Optionsbewertung nach Black

Beispiel:
Bewertung einer europäischen Call-Option auf eine Bundesanleihe mit Festzins von 5%, einer Restlaufzeit von drei Jahren und einem Nominal von 10.000 € bei einer Zinsstruktur der Nullkuponzinsen wie folgt:

t	1	2	3
z(0,t)	3,00%	4,00%	5,00%
ZBAF(0,t)	0,9709	0,9246	0,8638

Die Call-Option ist in t=1 fällig und hat einen Basispreis von 100.
Die Volatilität der Forward-Kurse wird mit 3% geschätzt.

Fairer Kurs der Anleihe
$= 5 \cdot 0{,}9709 + 5 \cdot 0{,}9246 + 105 \cdot 0{,}8638 = 100{,}1765$ in [%]
Forward-Kurs $F = 100{,}1765 \cdot 1{,}03 - 5 = 98{,}1818$ in [%]

Optionsbewertung nach Black

$\Rightarrow$ K = 100, F = 98,1818, σ=0,03, T=1, ZBAF(0,1)=0,9709

Bewertung der Option:

$\Rightarrow$ $d_1 = (\ln(98{,}1818/100) + 0{,}5 \cdot 0{,}03^2 \cdot 1)/0{,}03 \cdot 1^{0,5} = -0{,}60$

$d_2 = d_1 - 0{,}03 = -0{,}63$

$N(d_1) = 0{,}2743$ und $N(d_2) = 0{,}2643$

$\Rightarrow$ Preis des Calls

$C = 0{,}9709 \cdot (98{,}1818 \cdot 0{,}2743 - 100 \cdot 0{,}2643) = 0{,}4867$ in [%]

Gesamtsumme für das abzusichernde Nominal

= 0,4867 · 10.000 / 100 = 48,67 €

(oder Angabe des Call-Preises in BP des Nominales: C = 49 BP)

Innerer Wert der Call-Option $C_{IW} = \max((98{,}1818 - 100) \cdot 0{,}9709; 0) = 0$

Zeitwert der Call-Option = 0,4867 – 0 = 0,4867

Inhalt der Präsenzveranstaltung

1. Grundbegriffe der Finanzmathematik
2. Barwertberechnung und die Rendite bis Fälligkeit
3. Bewertung und Kurswertrisiken von Anleihen
4. Derivative Finanzinstrumente
5. Forwards und Futures
6. Zinsswaps
7. Aktienoptionen
8. Anleihenoptionen
9. *Zinsoptionen*

Zinsoptionen

sind Optionskontrakte, deren Wert vom Verlauf eines Referenzzinssatzes abhängt, die also als Underlying eine bestimmte Zinsrate haben.

$\Rightarrow$ Abhängigkeit von der gesamten Zinsstrukturkurve und deren zukünftiger Entwicklung

- Verteilungsfreie/modellunabhängige Analyse
- Nicht deterministische Entwicklung der Zinsen erfordert den Einsatz von stochastischen Methoden ($\rightarrow$ Binomialmodell, $\rightarrow$ Black-Modell)

Cap/Floor = Option auf einen Zinsausgleich, wenn der Referenzzins an bestimmten Zeitpunkten eine bestimmte Höhe (Basiszins) über-/unterschreitet.

Zinsoptionen dienen damit unter anderem der Absicherung gegen steigende/fallende Zinsen über einen gewissen Zeitraum.

Cap und Floor

Ein ***Cap*** auf einen Referenzzins an bestimmten Zeitpunkt setzt sich zusammen aus ***Caplet***s, Optionen mit Fälligkeit in den einzelnen im Cap vereinbarten Zeitpunkten, die einen Ausgleich zahlen, wenn der Referenzzins den vereinbarten Basiszins übersteigt.

Ein ***Floor*** auf einen Referenzzins an bestimmten Zeitpunkt setzt sich zusammen aus ***Floorlet***s, Optionen mit Fälligkeit in den einzelnen im Floor vereinbarten Zeitpunkten, die einen Ausgleich zahlen, wenn der Referenzzins den vereinbarten Basiszins unterschreitet.

Bei den Caplets und Floorlets handelt es sich um Optionen des europäischen Typs.

Verteilungsfreie/Modellunabhängige Analyse

- ***Ausübungswert eines Caplets***

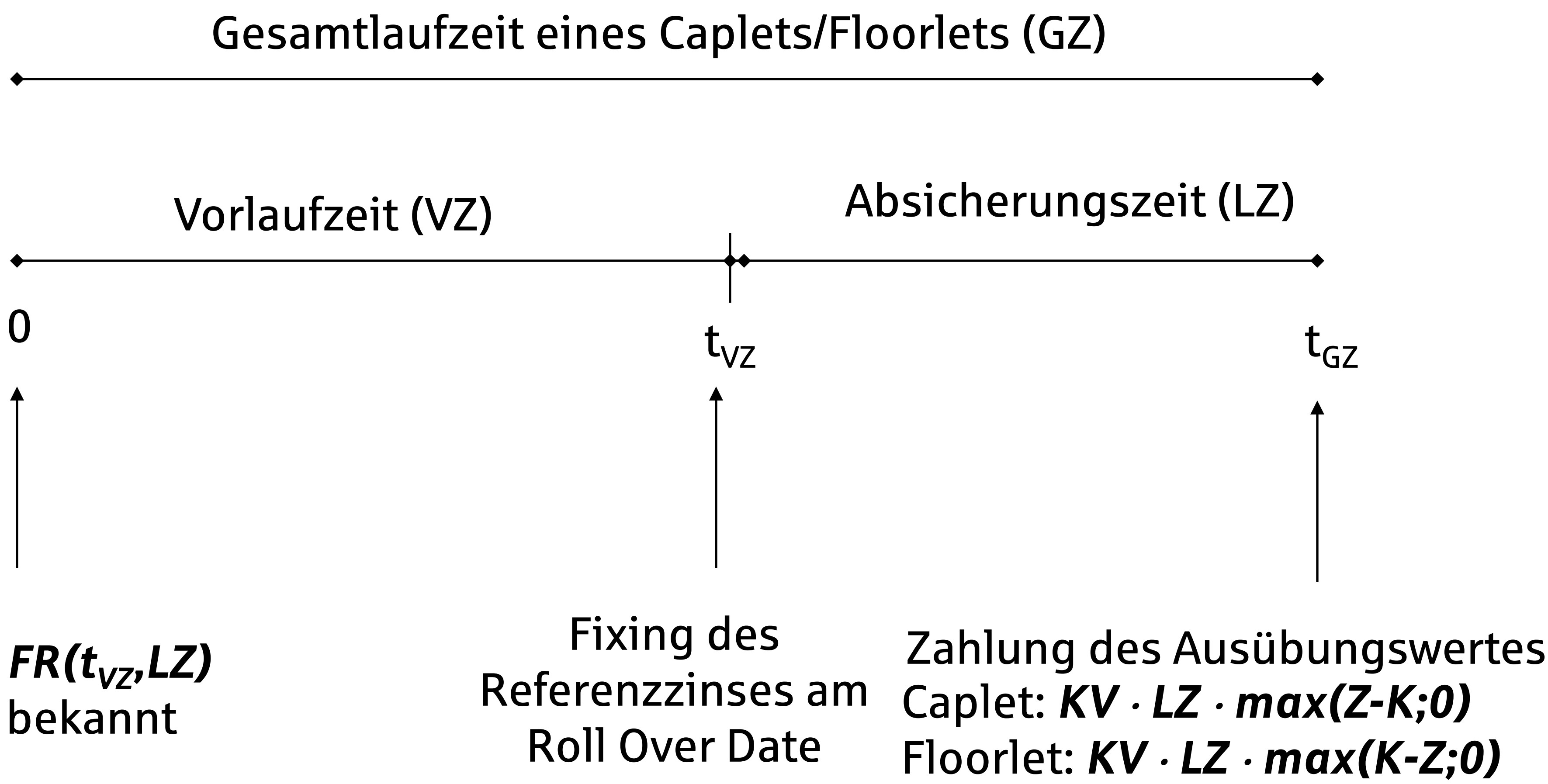
$$C(Z,K) = KV \cdot LZ \cdot \max(Z-K;0)$$

- ***Ausübungswert eines Floorlets***

$$F(Z,K) = KV \cdot LZ \cdot \max(K-Z;0)$$

wobei ***Z*** unbekannter Referenzzins bei Ausübung der Zinsoption
K der Basiszins
KV Kontraktvolumen, **LZ** Laufzeit

Charakterisierung von Caplets und Floorlets



Verteilungsfreie/Modellunabhängige Analyse
Innerer Wert eines Caps

Der innere Wert eines Caps bestimmt sich als Summe der inneren Werte der einzelnen Caplets, aus denen er sich zusammensetzt.

$$\textit{Cap-Preis} = \sum \textit{Caplet-Preise} = \sum \textit{Innere Werte der Caplets} + \textit{Zeitwert}$$

Für den inneren Wert eines Caplets gilt

$$\textit{Innerer Wert Caplet} = KV \cdot \max\left((FR(t_{VZ}, LZ) - K) \cdot ZBAF(0, t_{GZ}); 0\right) \cdot LZ$$

wobei	$FR(t_{VZ}, LZ)$	die heutige Forward-Rate für t_{VZ} mit Laufzeit LZ
	K	der Basispreis
	$ZBAF(0, t_{GZ})$	Zerobondabzinsungsfaktor für die Laufzeit t_{GZ}
	t_{GZ}	Gesamtlaufzeit des Caplets
	t_{VZ}	Vorlaufzeit des Caplets
	KV	Kontraktvolumen

Verteilungsfreie/Modellunabhängige Analyse
Innerer Wert eines Floors

Der innere Wert eines Floors bestimmt sich als Summe der inneren Werte der einzelnen Floorlets, aus denen er sich zusammensetzt.

Floor-Preis = $\sum$ ***Floorlet-Preise =*** $\sum$ ***Innere Werte der Floorlets +Zeitwert***

wobei für den inneren Wert eines Floorlets gilt

$$\textit{Innerer Wert Floorlet} = KV \cdot \max\left((K - FR(t_{VZ}, LZ)) \cdot ZBAF(0, t_{GZ}); 0\right) \cdot LZ$$

wobei	$FR(t_{VZ}, LZ)$	die heutige Forward-Rate für t_{VZ} mit Laufzeit LZ
	K	der Basispreis
	$ZBAF(0, t_{GZ})$	Zerobondabzinsungsfaktor für die Laufzeit t_{GZ}
	t_{GZ}	Gesamtlaufzeit des Floorlets
	t_{VZ}	Vorlaufzeit des Floorlets
	KV	Kontraktvolumen

Bewertung europäischer Optionen nach Black

Zugrundeliegende Annahmen des Black-Modells

- Vollkommener Kapitalmarkt
    - Keine Transaktionskosten, keine Steuern
    - Keine Verschuldungs- und Anlagebeschränkung
    - No-Arbitrage
    - Beliebige Teilbarkeit der Anlagen
    - Alle Marktteilnehmer verfügen über die gleiche Information.
- Die Investoren sind risikoneutral.
- Alle Marktteilnehmer haben homogene Erwartungen bezüglich der zukünftigen Kursentwicklung.
- *Stetiger Handel*
- *Die Entwicklung der Zinsen kann durch eine logarithmische Normalverteilung (Random Walk) beschrieben werden.*
- *Die Volatilität der Zinsentwicklung ist konstant.*

Bewertung von Caplets nach Black

Damit berechnet sich der **Preis eines Caplets**

$$\text{Caplet} = KV \cdot LZ \cdot ZBAF(0, t_{GZ}) \cdot (FR(t_{vz}, LZ) \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2))$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{FR(t_{VZ}, LZ)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 t_{VZ}}{\sigma\sqrt{t_{VZ}}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_{VZ}}$$

wobei	***FR(t_{VZ},LZ)***	die heutige Forward-Rate für t_{VZ} mit Laufzeit LZ
	K	der Basispreis
	ZBAF(0,t_{GZ})	Zerobondabzinsungsfaktor für die Laufzeit t_{GZ}
	t_{GZ}	Gesamtlaufzeit des Caplets
	t_{VZ}	Vorlaufzeit des Caplets
	LZ	Absicherungszeit des Caplets (=t_{GZ}-t_{VZ})
	σ	die Volatilität der Forward-Rates
	KV	Kontraktvolumen

Bewertung von Floorlets nach Black

Damit berechnet sich der **Preis eines Floorlets**

$$\text{Floorlet} = KV \cdot LZ \cdot ZBAF(0, t_{GZ}) \cdot (K \cdot N(-d_2) - FR(t_{vz}, LZ) \cdot N(-d_1))$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{FR(t_{VZ}, LZ)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 t_{VZ}}{\sigma\sqrt{t_{VZ}}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_{VZ}}$$

wobei

wobei	***FR(t$_{VZ}$,LZ)***	die heutige Forward-Rate für t_{VZ} mit Laufzeit LZ
	K	der Basispreis
	ZBAF(0,t$_{GZ}$)	Zerobondabzinsungsfaktor für die Laufzeit t_{GZ}
	t_{GZ}	Gesamtlaufzeit des Floorlets
	t_{VZ}	Vorlaufzeit des Floorlets
	LZ	Absicherungszeit des Floorlets (=t_{GZ}-t_{VZ})
	σ	die Volatilität der Forward-Rates
	KV	Kontraktvolumen

Optionsbewertung nach Black

Beispiel:
Bewertung eines Caps auf den 12M-EURIBOR mit Gesamtlaufzeit von drei Jahren, der sich aus zwei Caplets mit einjähriger bzw. zweijähriger Vorlaufzeit zusammensetzt und einen Basiszins von 5% hat. Wir unterstellen die folgende Zinsstruktur

t	1	2	3
z(0,t)	3,50%	4,50%	5,50%
ZBAF(0,t)	0,9662	0,9157	0,8516

Die Volatilität wird mit 4% geschätzt, das Kontraktvolumen beträgt 1 Mio. €.
Berechnung der Forward-Rates

t	1	2	3
FR(t-1,1)	3,50%	5,51%	7,53%

Optionsbewertung nach Black

1. Caplet mit t_{VZ}=1, t_{GZ}=2, LZ=1
$\Rightarrow$ K = 5%, FR(1,1) = 5,51%, σ=0,04, ZBAF(0,2)=0,9157, KV= 1 Mio. €

Bewertung der Option:

$\Rightarrow$ $d_1 = (\ln(0{,}0551/0{,}05) + 0{,}5 \cdot 0{,}04^2 \cdot 1)/0{,}04 \cdot 1^{0,5} = 2{,}45$

$d_2 = d_1 - 0{,}04 \cdot 1^{0,5} = 2{,}41$

$N(d_1) = 0{,}9929$ und $N(d_2) = 0{,}9920$

$\Rightarrow$ Preis des Caplets

$= 1.000.000 \cdot 1 \cdot 0{,}9157 \cdot (0{,}0551 \cdot 0{,}9929 - 0{,}05 \cdot 0{,}9920)$

= 4.678,12 €

Innerer Wert der Caplets

C_{IW}= 1.000.000 · max((5,51%-5%) · 0,9157;0) = 4.670,07

Zeitwert = 4.678,12 - 4.670,07 = 8,05

Optionsbewertung nach Black

2. Caplet mit t_{VZ}=2, t_{GZ}=3, LZ=1
$\Rightarrow$ K = 5%, FR(2,1) = 7,53%, σ=0,04, ZBAF(0,3)=0,8516 , KV = 1 Mio. €

Bewertung der Option:
$\Rightarrow \quad d_1 = (\ln(0{,}0753/0{,}05) + 0{,}5 \cdot 0{,}04^2 \cdot 2)/0{,}04 \cdot 2^{0{,}5} = 7{,}27$
$\quad d_2 = d_1 - 0{,}04 \cdot 2^{0{,}5} = 7{,}21$
$\quad N(d_1) = 1$ und $N(d_2) = 1$
$\Rightarrow$ Preis des Caplets
$\quad = 1.000.000 \cdot 1 \cdot 0{,}8516 \cdot (0{,}0753 \cdot 1 - 0{,}05 \cdot 1) = 21.545{,}48$ €
Innerer Wert der Caplets
$C_{IW} = 1.000.000 \cdot \max((7{,}53\% - 5\%) \cdot 0{,}8516 ; 0) = 21.545{,}48$
Zeitwert = 21.545,48 -21.545,48 = 0

3. Preis des Caps
Cap = 4.678,12 + 21.545,48 = 26.223,60 €
Innerer Wert des Caps = 4.670,07 + 21.545,48 = 26.215,55
Zeitwert des Caps = 8,05 + 0 = 8,05

Fazit der Veranstaltung

- Grundbegriffe der Finanzmathematik
- Zinsstrukturkurven und deren Ableitung
- Barwertberechnung

- Bewertung von Anleihen
- Yield to Maturity
- Messung der Kurswertrisiken von Anleihen

- Derivate und ihre Märkte
- Forward- und Future-Preise
- Zinsswaps und deren Bewertung und Risikoanalyse

- Aktienoptionen und deren Bewertung und Risikoanalyse
- Anleiheoptionen und deren Bewertung und Risikoanalyse
- Zinsoptionen und deren Bewertung und Risikoanalyse

Vielen Dank...

... für Ihre Konzentration und viel Erfolg bei der Klausur!