h_da
HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
fbmn
FACHBEREICH MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

Prof. Dr. Andreas Thümmel

Hochschule Darmstadt – University of Applied Sciences
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften

Schöfferstr. 3
Geb. C10, Raum 9.31
D-64295 Darmstadt

Tel.: +49 (6151) 163-7951
Email: thuemmel@h-da.de
Web: http://www.thuemmel.eu

Übungsaufgaben No. 2 zur Vorlesung Betriebliches Informationsmanagement

10. Mai 2023

0.0.1 Anwendung Derivate: Optionsmanagement

Als Anwendung für ein aktives Management mit Optionen wird hier die Absicherung eines Portfolios betrachtet. Diese Absicherung funktioniert durch geschickte Kombination einer Aktie mit einem Derivat. Diese Absicherung kann durch sog. Duplizierung äquivalent (d.h. mit gleichem Ergebnis bzw. gleicher (Absicherungs-) Wirkung) durch ein Portfolio mit einer Anleihe und einer Option auf die (oben erwähnte) Aktie durchgeführt werden.

Als Absicherung gilt in diesem Zusammenhang nun, dass für ein Investment mit einem Kapital V eine Mindestrückzahlung F zu einem, hier vereinfacht betrachteten, festen Termin stattfindet. F heisst dasnn der sog. Floor der Strategie.

Die Betrachtungen, die hier nun durchgerechnet werden, sind:

- Strategie 1:
  Angelegt wird V in Aktien plus Verkaufsoptionen - in noch zu bestimmender Anzahl.
- Strategie 1:
  Angelegt wird V in Anleihen plus Kaufoptionen (in noch zu bestimmender Anzahl).

Die für die weiteren Betrachtungen zu berücksichtigenden Eckwerte sind:

- die Auswahl der Finanztitel
- das zur Verfügung stehende Kapital (K)

- (zeitlicher) Anlagehorizont (T)
- Beginn der Investition T_0 (hier im Weiteren der Einfachheit halber $= 0$ gesetzt; für andere Zeitpunkte ist in den Rechnungen T durch $T - T_0$ zu setzen, Gelder bis T_0 sind zudem noch auf- oder abzuzinsen.)
- gewünschter Absicherungswert F, der sog. Floor (F ¡ K, jedoch nicht zu klein ...)

Zudem ist zu berücksichtigen, dass die Aktie eine (erwartete) Rendite auszahlt, diese kann stetig (Bez.: d) oder zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgen (Höhe der diskreten Rendeite: D_0).

Beispielrechnungen:

- Fall 1: stetige Rendite
  Die Aktie liefert eine stetige Dividende von $d = 2\%$ p.A., die wieder in das Portfolio zurückinvestiert wird. Der Wert dieser Auszahlung währende der Absischerungszeit (T) ist dann $n * \exp(d * T)$, wobei n die Anzahl der Aktien zum Ende der Laufzeit (d.h. in T) ist. Konkret bedeutet das: aus n Aktien sind in der Zeit bis T $n * \exp(d * T)$ Aktien im Portfolio durch die Reinvestition der Dividende geworden. In T_0 gilt dann folgende erste Bestimmungsgleichung:

  $$n * S_0 + n * \exp(d * T) * P(S_0, T, K, \mu, \sigma) = V \tag{1}$$

  Zum Zeitpunkt der Ausübung der Option, T, ist der kleinste Wert des Portfolios gegeben, wenn der Underlying-Preis genau dem Strike-Preis K ist (in dem Fall zahlt die Option nichts aus, und der Aktienkurs ist minimal). Das liefert für die Bestimmung der Absicherung die zweite Bestimmungsgleichung, da der Mindestwert des Portfolios zum Ausübungszeitpunkt mindestens gleich F sein muss:

  $$n * exp(d * T) * S_T = n * exp(d * T) * K \overset{!}{=} F \leftrightarrow n = \frac{F}{K} * \exp(-d * T) \tag{2}$$

  Setzt man dieses n in die erste Bestimmungsgleichung ein, so bekommt man:

  $$exp(-d * T) * S_0 + P(K) - \frac{V}{F} * K = 0 \tag{3}$$

  (hier ist die Formel für P bereits nach der gesuchten Größe K angegeben, da alle anderen Parameter für P, T, μ, σ, S_0 bekannt bzw. gegeben sind.)
  Dieses ist eine nicht-lineare Gleichung in K, die numerisch gelöst werden kann, z.B. mit dem Excel-Solver.

  Die entsprechende Strategie mit Anleihen und Call-Optionnen gilt die ähnliche Überlegung, es muss lediglich statt P der Call-Preis C eingesetzt werden. Die

Anleihe ist dabei risikolos, der Minimal-Wert zum Zeitpunkt T wird erreicht, wenn die Call-Optionen nichts bezahlen, das ist ebenfalls wieder der Strike-Preis der Call-Option.

Anm.: die Äquivalenz der Strategien folgt aus der Put-Call-Parität (s.o.).

- Fall 2: diskrete Rendite
  Währende der Laufzeit wird eine Dividende mit Barwert 5 ausgezahlt. Diese Auszahlung wird festverzinslich (risikolos) angelegt. Zum Zeitpunkt T wird diese Auszahlung mit $D_T = D_0 * \exp(iT) = 6.107$ bewertet.

  Der Kauf von n Aktien und n Puts führt dann unter Berücksichtigung der Dividende zu der analogen Überlegung von Fall 1 oben, die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$n * S_0 + n * P(S_0 - D_0, K) = V \tag{4}$$

$$n * K + n * D_T = F \tag{5}$$

  Wiederum Einsetzen der zweiten Gleichung, aufgelöst nach n, in die erste, liefert dann:

$$S_0 + P(S_0 - D_0, K) - \frac{V}{F} * (K + D_T) = 0 \tag{6}$$

In beiden Fällen sind so zwei Gleichungen für die beiden zu bestimmenden Größen n und K gegeben, so dass nach diesen beiden Variablen die Gleichungen zu lösen sind.

Zum Call- oder Put-Preis:

$$d_1 := \frac{\log\left(\frac{S}{X_0}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{7}$$

$$d_2 := \frac{\log\left(\frac{S}{X_0}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{8}$$

Hieraus folgt:

$$f^{Put}(S,t) = -S \cdot N(-d_1) + X_0 \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) \tag{9}$$

Der Call-Preis ist aus der Put-Call-Parität zu berechnen:

$$Call \ - \ Put = S - X_0 \cdot e^{-r(T-t)} \tag{10}$$