h_da
HOCHSCHULE DARMSTADT
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
fbmn
FACHBEREICH MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

Prof. Dr. Andreas Thümmel

Hochschule Darmstadt – University of Applied Sciences
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften

Schöfferstr. 3
Geb. C10, Raum 9.31
D-64295 Darmstadt

Tel.: +49 (6151) 163-7951
Email: thuemmel@h-da.de
Web: http://www.thuemmel.eu

Exkurs zur Vorlesung Derivate

02. Juni 2023

Exotische Derivate - Bewertungsformeln

Bewertungsformel für eine geometrische Mittelwert-Call (geometric average rate call):
Payoff:

$$\max(A - E; 0)$$

mit A dem stetigen geometrischen Mittel.

Black/Scholes-Wert:

$$\exp^{-r(T-t)}\left(G\ \exp\left(\frac{(r-D-\sigma^2/2)*(T-t)^2}{2T}+\frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}\right)N(d_1)-EN(d_2)\right)$$

wobei

$$I=\int_0^t \log(S(\tau))\ d\tau, \quad G=\exp^{I/T} S^{(T-t)/T}$$

$$d_1=\frac{T\log(G/E)+(r-D-\sigma^2/2)(T-t)^2/2+\sigma^2(T-t)^3/(3T)}{\sigma\sqrt{(T-t)^3/3}}$$

$$d_2=\frac{T\log(G/E)+(r-D-\sigma^2/2)(T-t)^2/2}{\sigma\sqrt{(T-t)^3/3}}$$

Für einen geometrischen Mittelwert-Put (geometric average rate put) gilt:

Payoff $= \max(E - A, 0)$

wobei A der geometrische Mittelwert eines lognormalen Random Walk ist.

Anm.: dieser ist selbst wieder lognormal verteilt, jedoch mit reduzierter Volatilität.

Der B/S-Wert ist:

$$\exp^{-r(T-t)}\left(EN(-d_2) - G\ \exp\left(\frac{(r-D-\sigma^2/2)*(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}\right)N(d_1)\right)$$

Floating Strike Lookback Call:

Der Payoff ist $\max(S-M, 0) = S-M$, wobei M das realisierte Minimum des Preises ist.

Der Wert dieser Option ist:

$$Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Me^{-r(T-t)}N(d_2)+$$

$$+Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)}\left(\left(\frac{S}{M}\right)^{-\frac{2(r-D)}{\sigma^2}}N\left(-d_1 + \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) - e^{(r-D)(T-t)}N(-d_1)\right)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + (r - D + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Barrier Options:

Mit q der Dividenden-Rate (dividend yield) oder dem FX-Zins, sowie S_b der Barrier-Position, sei:

$$a = \left(\frac{S_b}{S}\right)^{-1+\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}, \quad b = \left(\frac{S_b}{S}\right)^{1+\frac{2(r-q)}{\sigma^2}}$$

Zudem:

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_3 = \frac{\log(S/S_b) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_4 = \frac{\log(S/S_b) + (r - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_5 = \frac{\log(S/S_b) - (r - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_6 = \frac{\log(S/S_b) - (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_7 = \frac{\log(SE/S_b^2) - (r - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_8 = \frac{\log(SE/S_b^2) - (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Mit diesen Definitionen sind die Werte wie folgt:

Up-and-out call:

$S\exp\left(q(T-t)(N(d_1) - N(d_3) - b(N(d_6) - N(d_8))) - E\exp -r(T-t)(N(d_2) - N(d_4) - a(N(d_5) - N(d_7)))\right.$

Up-and-in call:

$S\exp\left(q(T-t)(N(d_3) + b(N(d_6) - N(d_8))) - E\exp -r(T-t)(N(d_4) + a(N(d_5) - N(d_7)))\right.$

Down-and-out call:

1. $E > S_0$:

$$Se^{q(T-t)}(N(d_1) - b(1 - N(d_8))) - Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - a(1 - N(d_7)))$$

2. $E < S_0$:

$$Se^{q(T-t)}(N(d_3) - b(1 - N(d_6))) - Ee^{-r(T-t)}(N(d_4) - a(1 - N(d_5)))$$

Down-and-in call:

1. $E > S_0$:

$$Se^{q(T-t)}b(1 - N(d_8)) - Ee^{-r(T-t)}(a(1 - N(d_7))$$

2. $E < S_0$:

$Se^{q(T-t)}(N(d_1) - N(d_3) + b(1 - N(d_6))) - Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_4) + a(1 - N(d_5)))$